H. PUPKE

EINFÜHRUNG IN DIE MATRIZENRECHNUNG

DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

H. PUPKE

EINFÜHRUNG IN DIE MATRIZENRECHNUNG

DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

PUPKE · EINFÜHRUNG IN DIE MATRIZENRECHNUNG

HOCHSCHULBÜCHER FÜR PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON FRANZ X. EDER UND ROBERT ROMPE

BAND 7

EINFÜHRUNG IN DIE MATRIZENRECHNUNG

UND IHRE PHYSIKALISCHEN ANWENDUNGEN

VON DR. HERBERT PUPKE

wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Gasentladungsphysik
der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin,
Greifswald

1953

DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

BERLIN

Erschienen im Deutschen Verlag der Wissenschaften, Berlin C 2, Oberwasserstraße 11/12
Arbeits-Nr. 22037 / Lizenz-Nr. 206 · 435/24/52
Satz und Druck: Druckhaus Einheit Leipzig III/18/211
Printed in Germany

VORWORT

Der Matrizenkalkül wurde ursprünglich nur in der Mathematik benutzt. Das Wort „Matrix" wurde 1850 von SYLVESTER zur Bezeichnung eines rechteckigen Zahlenschemas, aus dem Determinanten gebildet werden können, geprägt. Für die Physik gewann die Matrizenrechnung Bedeutung, als die stetigen Rechengrößen der klassischen Mechanik nicht mehr zur Beschreibung des diskontinuierlichen Wesens der Atomvorgänge ausreichten; 1900 stellte PLANCK die Hypothese der Energiequanten auf; BOHR wandte die PLANCKsche Idee auf das Atommodell von RUTHERFORD an, und HEISENBERG erweiterte in Zusammenarbeit mit JORDAN und BORN die Quantentheorie unter Benutzung der Matrizenrechnung zur Matrizenmechanik.

Darüber hinaus hat die Matrizenrechnung in jüngster Zeit – besonders gefördert durch FELDTKELLER – auch Eingang in die Elektrotechnik und Hochfrequenztechnik gefunden. Ja sogar zur Klärung medizinisch-psychologischer Probleme scheint die Matrizenrechnung mit Vorteil herangezogen werden zu können (vgl. Literaturübersicht).

Gegenüber der Wellenmechanik, die zum gleichen Resultat kommt wie die Matrizenmechanik, besitzt die Matrizenmechanik den Vorteil, daß sie in ihrem inneren Aufbau klarer und durchsichtiger ist und zudem tiefer reicht als die Wellenmechanik. Aber sie erscheint als symbolischer Kalkül manchem unanschaulich und wird darum von einigen sogar verworfen. Wenn gegen die Anwendung der Matrizenrechnung auf Probleme der Elektrotechnik und Hochfrequenztechnik nicht diese Einwände erhoben werden, so liegt der Grund darin, daß die Matrizen der Elektrotechnik und Hochfrequenztechnik endliche Matrizen sind, die in ihrer Struktur leichter zu übersehen sind als die unendlichen der Matrizenmechanik. Das der Matrizenrechnung entgegengebrachte Mißtrauen scheint mir darin begründet zu liegen, daß die Kritiker den mathematischen Apparat des Matrizenkalküls selbst nicht – oder zum mindesten ungenau – kennen. Deshalb erschien es mir nützlich, in einer Schrift, die Schritt für Schritt das weite Gebiet durchstreift, zunächst die mathematischen Grundlagen klarzulegen, um dann die physikalischen Anwendungen zu behandeln. Da sie kein Lehrbuch sein sollte, sondern nur eine Einführung, konnten manche Probleme nur skizziert werden; insbesondere ist die Darstellung der Anwendungen nur als kurzer Abriß zu werten. Trotz mancher Bedenken habe ich eine größere Anzahl von Zahlenbeispielen aufgeführt, um die Rechenoperationen anschaulicher zu gestalten.

Die zur Abfassung der Schrift herangezogene Literatur ist in einem Literaturverzeichnis zusammengestellt worden. Dieses Verzeichnis soll zugleich dem Leser Gelegenheit geben, tiefer in die von ihm gewünschten Probleme und Gedankengänge einzudringen.

Die vorliegende Schrift ist in den Jahren 1943/44 entstanden. Infolge der Ungunst der Zeiten mußte ihre Veröffentlichung bis jetzt hinausgeschoben werden. Atomphysik, Elektrotechnik und Hochfrequenztechnik sind diejenigen Disziplinen geworden, ohne die ein Fortschritt wissenschaftlicher Erkenntnis und technischer Vollkommenheit nicht denkbar ist. Die junge heranwachsende Generation ist dazu berufen, die wissenschaftlichen Leistungen der Vergangenheit in die Zukunft hinüberzutragen. So möge auch diese Schrift dazu dienen, die Kenntnis der genannten Disziplinen zu vertiefen und zu weiterer Forschung anzuregen.

Es ist mir ein besonderes Bedürfnis, an dieser Stelle meiner Frau für die tatkräftige Mitarbeit bei der Herstellung des Manuskriptes meinen herzlichen Dank auszusprechen.

Weiterhin danke ich dem Verlag für das große Entgegenkommen bei der Drucklegung und für die schöne Ausstattung des Buches.

H. Pupke.

INHALTSVERZEICHNIS

A. ENDLICHE MATRIZEN

I. Elemente der Matrizenalgebra

1. Erklärung des Begriffes Matrix und Bedeutung der Matrizen

Definition 1: Eine endliche Matrix heißt ein System von $m \cdot n$ Zahlen oder auch Rechengrößen a_{ik} $(i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, n)$, die in einem rechteckigen Schema von m-Zeilen (Horizontalreihen) und n-Spalten (Kolonnen, Vertikalreihen) angeordnet sind. Die Größen a_{ik} heißen Elemente der Matrix.

Im folgenden werden Matrizen stets mit ihren Elementen entsprechenden großen deutschen Buchstaben bezeichnet werden. Zur Kennzeichnung der Matrix wird das System aus den $n \cdot m$ Elementen zwischen zwei runde Klammern gesetzt; die senkrechten Striche bleiben für die Kennzeichnung der Determinante vorbehalten.

Eine Matrix $\mathfrak{A}$ kann daher ausführlich folgendermaßen geschrieben werden:

$$\mathfrak{A} = (a_{ik})_{(m,n)} = (a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1,1)$$

i bedeutet dabei stets den Zeilenindex, k den Spaltenindex. (m, n) gibt die Ordnung der Matrix an; man sagt auch: eine Matrix ist vom Typ (m, n).

Beispiel: Eine Matrix der Ordnung (3,2) hat die Gestalt:

$$(a_{ik})_{(3,2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

Ist $m \neq n$, so heißt die Matrix rechteckig; ist $m = n$, so heißt sie quadratisch.

Eine Matrix, für die m bzw. $n = 1$ ist, wird einreihige bzw. einspaltige Matrix, auch Zeilen- bzw. Spaltenmatrix genannt. Diese Matrizen werden mit kleinen deutschen Buchstaben bezeichnet und dienen zur Darstellung der Vektoren; Vektoren lassen sich also deuten als Matrizen der Ordnung $(m, 1)$ bzw. $(1, n)$.

Da es üblich ist, einen Vektor als Produkt aus einer Maßzahl und einem Einheitsvektor darzustellen, enthält die Matrix, die einem Vektor zugeordnet ist, als Elemente die Maßzahlen bezüglich der Komponenten in Richtung der Achsen eines Koordinatensystems oder auch die Komponenten des Vektors selbst.

Beispiel: Es ist

$$\mathfrak{a} = (a_{ik})_{(1,n)} = (a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n}) = (a_1\, a_2 \ldots a_n)\,, \qquad (1,2)$$

$$\mathfrak{b} = (b_{ik})_{(m,1)} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \qquad (1,3)$$

Infolge der Eindeutigkeit brauchen bei den Vektoren die Elemente nur mit einem Index versehen zu werden.

Darüber hinaus können aber die Elemente einer Matrix die verschiedensten Bedeutungen haben. Sie können Skalare, Tensoren, Determinanten, Koeffizienten von Reihenentwicklungen oder linearen Gleichungen, Transformationen, Bilinearformen, quadratische Formen usw., aber auch wieder Matrizen sein. Matrizen, deren Elemente wieder Matrizen sind, heißen Übermatrizen.

Der Begriff der Matrix unterscheidet sich wesentlich von dem der Determinante: die Determinante ist eine skalare Größe; die Matrix ist dagegen als zusammengesetzte Größe, als komplexe Größe höherer Ordnung oder als System aufzufassen. Im Gegensatz zu der Erklärung der Determinante enthält die Matrix keine Rechenvorschrift, die die Elemente miteinander verknüpft. Ein anderer Unterschied gegenüber der Determinante liegt darin, daß bei einer Matrix $n \neq m$ sein kann. Der Begriff der komplexen Zahl wird als ein geordnetes Paar reeller Zahlen erklärt, der des Vektors im dreidimensionalen Raum als ein geordnetes Zahlentripel, der der Matrix als ein System von $m \cdot n$ geordneten Größen in rechteckiger Anordnung. Danach stellt der Begriff der Matrix eine Verallgemeinerung des Begriffes der komplexen Zahl und des Vektorbegriffes dar: sie ist eine hyperkomplexe Größe.

Die physikalische Bedeutung der Matrizen wird in Teil III behandelt.

2. Gleichheit von Matrizen

Definition 2: Eine rechteckige Matrix der Ordnung (m, n) kann stets in eine quadratische Matrix überführt werden, indem man, je nachdem $m \lesseqgtr n$ ist, als Elemente der fehlenden Spalten bzw. Reihen Nullen setzt.

Die Ordnung der Matrix ändert sich dabei.

Beispiel: Es ist

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2,1}$$

Zwei Matrizen, die gleiche Ordnung haben, heißen gleichartige Matrizen. Die Gleichheit zweier Matrizen wird folgendermaßen definiert:

Definition 3: Zwei Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind dann und nur dann gleich, wenn sie die gleiche Ordnung besitzen und je zwei homologe Elemente gleich sind.

Es gilt also

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}, \tag{2,2}$$

wenn stets

$$a_{ik} = b_{ik} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, m; \quad k = 1, \ldots n \tag{2,3}$$

erfüllt ist.

Gleichung (2,2) faßt also die $m \cdot n$ Gleichungen (2,3) zwischen den Elementen der Matrix zusammen; umgekehrt kann eine Folge gewöhnlicher Gleichungen immer durch eine Gleichung mit Matrizen dargestellt werden.

Beispiel: Die 4 Skalargleichungen

$$a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad a_3 = b_3, \quad a_4 = b_4 \tag{2,4}$$

sind in jeder der folgenden Matrizengleichungen enthalten:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}, \tag{2,4a}$$

$$(a_1\ a_2\ a_3\ a_4) = (b_1\ b_2\ b_3\ b_4), \tag{2,4b}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}. \tag{2,4c}$$

Die Definition der Gleichheit zweier Matrizen zeigt, daß es keinen Sinn hat, von dem Wert einer Matrix zu sprechen, im Gegensatz zu der Determinante, wo zwei Determinanten einander gleich sein können, während ihre Elemente verschieden sind.

3. Addition und Subtraktion von Matrizen.

Definition 4: Zwei (oder mehr) Matrizen werden addiert, indem man ihre entsprechenden Elemente addiert.

Diese Vorschrift verlangt, daß die beiden durch Addition zu verknüpfenden Matrizen von der gleichen Ordnung sind; die Addition hat daher keinen Sinn, wenn die Matrizen ungleicher Ordnung sind, d. h. zwei Matrizen

$$\mathfrak{A} = (a_{ik})_{(m,n)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = (b_{ik})_{(r,s)}$$

können genau dann addiert werden, wenn $m = r$ und $n = s$ ist, wenn sie also gleichartig sind.

Ist also gegeben $\quad \mathfrak{A} = (a_{ik})_{(m,n)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = (b_{ik})_{(m,n)}, \quad$ (3,1)

so ist

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = (a_{ik} + b_{ik})_{(m,n)} &= (c_{ik})_{(m,n)} \\ c_{ik} &= a_{ik} + b_{ik}\,. \end{aligned}\right\} \tag{3,2}$$

und

Die Summenmatrix hat also die gleiche Ordnung wie die ihrer Summanden.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 1 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

Es gilt nun

Satz 1: Die Matrizenaddition ist kommutativ:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}. \tag{3,3}$$

Satz 2: Die Matrizenaddition befolgt das assoziative Gesetz:

$$\left.\begin{aligned} (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + \mathfrak{C} &= \mathfrak{A} + (\mathfrak{B} + \mathfrak{C}), \\ (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) + (\mathfrak{C} + \mathfrak{D}) &= (\mathfrak{A} + \mathfrak{C}) + (\mathfrak{B} + \mathfrak{D}). \end{aligned}\right\} \tag{3,4}$$

also ist auch

Definition 5: Zwei (oder mehr) gleichartige Matrizen werden voneinander subtrahiert, indem man ihre entsprechenden Elemente subtrahiert.

Ist also wieder (3,1) gegeben, so ist

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \mathfrak{C} = (a_{ik} - b_{ik})_{(m,n)} &= (c_{ik})_{(m,n)}, \\ c_{ik} &= a_{ik} - b_{ik}\,. \end{aligned}\right\} \tag{3,5}$$

Beispiel: $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Satz 3: Die Matrizensubtraktion befolgt das assoziative Gesetz:

$$\mathfrak{A} + (\mathfrak{B} - \mathfrak{C}) = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) - \mathfrak{C}. \tag{3,6}$$

Das kommutative Gesetz gilt naturgemäß nicht.

4. Multiplikation von Matrizen. Vertauschbarkeit

a) Skalare Multiplikation

Definition 6: Eine Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ wird mit einer beliebigen komplexen Zahl λ (einem Skalar) multipliziert, indem man jedes Element mit λ multipliziert:

$$\mathfrak{A}\lambda = \lambda\mathfrak{A} = (\lambda a_{ik})_{(m,n)} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{4,1}$$

Hinsichtlich der Addition und skalaren Multiplikation verhalten sich daher die Matrizen wie ihre Elemente.

Beispiel: $$3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Es gilt weiterhin

Satz 4: $$\lambda(\mathfrak{A} \pm \mathfrak{B}) = \lambda\mathfrak{A} \pm \lambda\mathfrak{B}. \tag{4,2}$$

Der Beweis folgt aus Gleichung (3,2), (3,5) und (4,1).

Beispiel: $$3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Produkte quadratischer Matrizen

Definition 7: Das Produkt $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ der gleichartigen quadratischen Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist erklärt durch

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B} &= (a_{ik})_{(n,n)} \cdot (b_{ik})_{(n,n)} = \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu k}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{\nu=1}^{n} a_{1\nu} b_{\nu 1} & \dots & \sum_{\nu=1}^{n} a_{1\nu} b_{\nu n} \\ \vdots & & \\ \sum_{\nu=1}^{n} a_{n\nu} b_{\nu 1} & \dots & \sum_{\nu=1}^{n} a_{n\nu} b_{\nu n} \end{pmatrix} \\ &= (c_{ik}) \\ \text{mit} \qquad c_{ik} &= \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu k}. \end{aligned}\right\} \tag{4,3}$$

Das Element in der i-Zeile und k-Spalte der Produktmatrix ist das Skalarprodukt des i-Zeilenvektors $(a_{i1} \ldots a_{in})$ von $\mathfrak{A}$ mit dem k-Spaltenvektor $(b_{1k} \ldots b_{nk})$ von $\mathfrak{B}$.

Diese Möglichkeit der Produktbildung wurde durch die Anwendung bei den linearen Transformationen nahegelegt.

Betrachtet man die linearen Substitutionen:

$$\begin{array}{l} z_1 = a_{11} y_1 + \cdots + a_{1n} y_n \\ \vdots \\ z_m = a_{m1} y_1 + \cdots + a_{mn} y_n \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} y_1 = b_{11} x_1 + \cdots + b_{1r} x_r \\ \vdots \\ y_n = b_{n1} x_1 + \cdots + b_{nr} x_r \end{array},$$

so folgt, daß $z_1, \ldots, z_m$ lineare Funktionen der $x_1, \ldots, x_r$ sind:

$$\begin{array}{l} z_1 = c_{11} x_1 + \cdots + c_{1r} x_r \\ \vdots \\ z_m = c_{m1} x_1 + \cdots + c_{mr} x_r \end{array}, \quad c_{ik} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu k}.$$

Die Produktbildung erinnert an die Multiplikation der Determinanten. Aber es besteht ein wesentlicher Unterschied: Bei der Multiplikation von Determinanten ist es gleichgültig, ob man die Zeilen des 1. Faktors mit den Zeilen des 2. Faktors oder die Spalten des 1. Faktors mit den Spalten des 2. Faktors oder auch die Zeilen des einen Faktors mit den Spalten des anderen kombiniert. Die Matrizenmultiplikation dagegen ist völlig eindeutig definiert. Hier dürfen nur die Zeilen des 1. Faktors mit den Spalten des 2. Faktors skalar multipliziert werden, und außerdem muß das Skalarprodukt

$$(a_{i1}, \ldots, a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}$$

in der Matrix $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ genau an die Stelle in der i-Zeile und k-Spalte kommen.

Die Bildung der skalaren Produkte c_{ik} ist bei quadratischen Matrizen nur möglich, wenn sie dieselbe Zeilen- und Spaltenzahl besitzen, also gleichartig sind. Die Produktmatrix besitzt dann die gleiche Ordnung wie die der Faktoren.

Beispiel: $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 3\cdot 1 & 1\cdot 5 + 3\cdot 3 \\ 2\cdot 2 + 4\cdot 1 & 2\cdot 5 + 4\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ 8 & 22 \end{pmatrix}.$$

Satz 5: Es gelten die distributiven Gesetze der Multiplikation

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\,\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}\mathfrak{C} \tag{4,4}$$

und

$$\mathfrak{A}\,(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}. \tag{4,5}$$

Beweis: Es sei $\mathfrak{A} = (a_{ik})$, $\mathfrak{B} = (b_{ik})$, $\mathfrak{C} = (c_{ik})$,

dann ist das allgemeine Element

$$\sum_\nu (a_{i\nu} + b_{i\nu})\, c_{\nu k} = \sum_\nu a_{i\nu} c_{\nu k} + \sum_\nu b_{i\nu} c_{\nu k}$$

und

$$\sum_\nu a_{i\nu} (b_{\nu k} + c_{\nu k}) = \sum_\nu a_{i\nu} b_{\nu k} + \sum_\nu a_{i\nu} c_{\nu k}\,,$$

d. h. es gilt (4,4) und (4,5).

Satz 6: Es gilt das assoziative Gesetz der Multiplikation:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\,\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\,(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\,. \tag{4,6}$$

Beweis: Es sei $\mathfrak{A} = (a_{ik})\,,\ \mathfrak{B} = (b_{ik})\,,\ \mathfrak{C} = (c_{ik})\,,\ \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = (d_{ik})\,,$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (\alpha_{ik})\,,\ \mathfrak{B}\mathfrak{C} = (\beta_{ik})\,,$$

dann ist das allgemeine Element d_{ik} von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$:

$$\begin{aligned} d_{ik} &= \sum_\varrho \alpha_{i\varrho}\, c_{\varrho k} = \sum_\varrho \Big(\sum_\nu a_{i\nu} b_{\nu\varrho}\Big)\, c_{\varrho k} \\ &= \sum_{\varrho,\nu} a_{i\nu} b_{\nu\varrho}\, c_{\varrho k} = \sum_\nu a_{i\nu} \sum_\varrho b_{\nu\varrho}\, c_{\varrho k} \\ &= \sum_\nu a_{i\nu}\, \beta_{\nu k}\,, \end{aligned}$$

d. h. es gilt (4,6).

Satz 7: Das kommutative Gesetz gilt allgemein nicht:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}\mathfrak{A}\,, \tag{4,7}$$

da im allgemeinen

$$\sum_\nu a_{i\nu} b_{\nu k} \neq \sum_\nu b_{i\nu} a_{\nu k}\,. \tag{4,8}$$

Zwei Matrizen, für die $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ ist, heißen miteinander vertauschbar. Ein Maß für die Abweichung von der Vertauschbarkeit ist die Differenzmatrix $\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\mathfrak{A}$; sie soll unter Hinzufügung eines konstanten Faktors durch ein Klammersymbol abgekürzt werden:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \varkappa\,[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}]\,, \qquad \varkappa = \text{const}\,. \tag{4,9}$$

Infolge der Nichtgültigkeit des kommutativen Gesetzes der Multiplikation sind Gleichung (4,4) und (4,5) aus Satz 5 logisch voneinander unabhängig.

Aus Gleichung (4,7) folgt, daß es nicht gleichgültig ist, ob eine Matrix $\mathfrak{A}$ von „rechts her" ($\mathfrak{A}\mathfrak{B}$) oder von „links her" ($\mathfrak{B}\mathfrak{A}$) mit einer Matrix $\mathfrak{B}$ multipliziert wird, d. h., die Reihenfolge der Faktoren ist bei der Matrizenmultiplikation stets innezuhalten.

Für die Gleichheit zweier Matrizen ergibt sich damit folgendes: Wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ drei Matrizen sind, dann folgt aus $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ auch $\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und ebenso $\mathfrak{C}\mathfrak{A} = \mathfrak{C}\mathfrak{B}$, d. h. die Matrizengleichung bleibt richtig, wenn man auf beiden Seiten rechts oder auf beiden Seiten links eine weitere Matrix als Faktor anfügt. Man beachte aber, daß man die neue Matrix *nicht* auf der einen Seite rechts und auf der anderen Seite links als Faktor anfügen darf, da die Matrizenmultiplikation im allgemeinen nicht kommutativ ist.

Statt Multiplikation von „links her" bzw. von „rechts her" spricht man auch von vorderer bzw. hinterer Multiplikation.

Beispiel 1: Es sei

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

dann ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 26 \\ -4 & -9 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix},$$

d. h.

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}\mathfrak{A}.$$

Beispiel 2: Es sei $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$,

dann ist:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

und

$$\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ -7 & -10 \end{pmatrix},$$

d. h. $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}\mathfrak{A}$. Im Gegensatz zu den natürlichen Zahlen kann also das Produkt zweier nichtverschwindender Matrizen „0" sein (vgl. 5. Nullmatrix).

Beispiel 3: Es sei $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

dann ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind also zwei miteinander vertauschbare Matrizen.

c) Produkt rechteckiger Matrizen

Die Multiplikation nichtquadratischer Matrizen erfordert Zusatzbedingungen, damit das Produkt existiert.

Es seien die Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})_{(m_1, n_1)}$
und die Matrix $\mathfrak{B} = (b_{ik})_{(m_2, n_2)}$ (4,10)

gegeben. Das Produkt ist wieder durch Gleichung (4,3) definiert. Damit die Bildung der Produkte $c_{ik} = \sum_{\nu} a_{i\nu} b_{\nu k}$ möglich ist, muß die Anzahl der Spalten von $\mathfrak{A}$ gleich der Anzahl der Zeilen von $\mathfrak{B}$ sein. Nur für diesen Fall ist das Produkt zweier Matrizen erklärt. Es muß also nach Gleichung (4,10) $n_1 = m_2$ sein. Soll andererseits das Produkt $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ existieren, so lautet die Bedingung: $n_2 = m_1$. Es gilt nun

Satz 8: Hat eine Matrix $\mathfrak{A}$ die Ordnung (m, n) und eine Matrix $\mathfrak{B}$ die Ordnung (n, r) so hat die Produktmatrix $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ die Ordnung (m, r).

Der Beweis folgt aus der Definitionsgleichung der Produktmatrix; denn das Element c_{ik} der Produktmatrix ist gegeben durch

$$c_{ik} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu k} \qquad (i = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, r).$$

Das Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (a_{ik})_{(m_1, m_2)} \cdot (b_{ik})_{(m_2, n_2)}$ liefert also eine Matrix der Ordnung (m_1, n_2); das Produkt $\mathfrak{B}\mathfrak{A} = (b_{ik})_{(m_2, m_1)} \cdot (a_{ik})_{(m_1, n_1)}$ eine Matrix der Ordnung (m_2, n_1).

Sollen gleichzeitig $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ existieren, so müssen auch beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt sein:

$$n_1 = m_2,\ n_2 = m_1,$$

d.h. $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist von der Ordnung (n_2, n_2) und $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ von der Ordnung (n_1, n_1); beide Produktmatrizen sind also quadratisch.

Nach J. Schur bezeichnet man Matrizen, deren Spaltenzahl der ersten Matrix gleich der Zeilenzahl der zweiten ist, als miteinander „verkettet".

Beispiel 1: Gegeben sei

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}_{(2,3)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}_{(3,3)}$$

$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ hat die Ordnung (2,3), und es ist wegen $c_{ik} = \sum_{\nu=1}^{3} a_{i\nu} b_{\nu k}$ mit $i = 1, 2;\ k = 1, 2, 3$:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 3 \\ 17 & 18 & 6 \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ existiert nicht! Es ist $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}$ verkettet, aber nicht $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{A}$.

Beispiel 2: Es sei

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{(2,3)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}_{(3,2)},$$

dann hat $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ die Ordnung (2,2), und es ist wegen $c_{ik} = \sum_{\nu=1}^{3} a_{i\nu} b_{\nu k}$ mit $i = 1, 2;\ k = 1, 2$:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 9 & 17 \\ 7 & 20 \end{pmatrix};$$

$\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ hat die Ordnung (3,3), und es ist wegen $c_{ik} = \sum_{\nu=1}^{2} a_{i\nu} b_{\nu k}$ mit $i, k = 1, 2, 3$:

$$\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 7 & 8 & 17 \\ 9 & 6 & 19 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3: Es sei

$$\mathfrak{A} = (1\ \ 4\ \ 3)_{(1,3)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}_{(3,1)},$$

dann hat $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ die Ordnung (1,1), und es ist wegen $c_{ik} = \sum_{\nu=1}^{3} a_{i\nu} b_{\nu k}$ mit $i, k = 1$:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (17) = 17 \cdot (1)$$

[vgl. Gleichung (4,1)], während $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$ die Ordnung (3,3) hat; wegen $c_{ik} = a_{i\nu} b_{\nu k}$ mit $i, k = 1, 2, 3$

ist
$$\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 3 & 12 & 9 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Als Umkehrung gilt:

Satz 9: Jede (m, n)-Matrix mit von Null verschiedenen Elementen läßt sich als Produkt einer Spalten- und einer Zeilenmatrix darstellen.

Die Produktregel lautet: $(m, n) = (m, 1)\,(1, n)$.

Beispiel:
$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 20 \\ 4 & -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (2 \;\; -1 \;\; 4) = \mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

also
$$\mathfrak{C}_{(2,3)} = \mathfrak{A}_{(2,1)} \cdot \mathfrak{B}_{(1,3)}.$$

d) Fortlaufende Produkte

Soll ein Produkt aus mehreren Faktoren gebildet werden, so müssen aufeinanderfolgende Faktoren miteinander verkettet sein, damit das Produkt existiert. Sind die Faktoren quadratische Matrizen gleicher Ordnung (gleichartig), so läßt sich die Produktbildung immer durchführen. Für rechteckige Matrizen müssen folgende Bedingungen erfüllt sein, um das Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} \ldots \mathfrak{Z}$ bilden zu können: Hat $\mathfrak{A}$ die Ordnung (m, n), so muß $\mathfrak{B}$ die Ordnung (n, o), $\mathfrak{C}$ die Ordnung (o, p), $\mathfrak{D}$ die Ordnung (p, q), ... haben, d. h.

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} \cdots \mathfrak{Z} = (a_{ik})_{(m,n)} (b_{ik})_{(n,o)} (c_{ik})_{(o,p)} \cdots (z_{ik})_{(y,z)}.$$

Die Ordnung der Produktmatrix ist daher:

$$(m, n) \cdot (n, o) \cdot (o, p) \cdots (y, z) = (m, z). \tag{4,11}$$

Diese „Verkettungs"- oder „Anpassungs"-Bedingung ist auch notwendig für die Gültigkeit des durch Satz 6 Gleichung (4,6) ausgesprochenen assoziativen Gesetzes.

Beispiel: Es sei gegeben

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{(2,2)}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{(2,3)}, \quad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{(3,1)}, \quad \mathfrak{D} = (1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4)_{(1,4)},$$

dann ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{(2,2)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{(2,3)} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 11 & 13 & 4 \end{pmatrix}_{(2,3)},$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 11 & 13 & 4 \end{pmatrix}_{(2,3)} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{(3,1)} = \begin{pmatrix} 24 \\ 54 \end{pmatrix}_{(2,1)},$$

und

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 24 \\ 54 \end{pmatrix}_{(2,1)} \cdot (1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 4)_{(1,4)} = \begin{pmatrix} 24 & 48 & 72 & 96 \\ 54 & 108 & 162 & 216 \end{pmatrix}_{(2,4)}.$$

e) Das direkte Produkt

Außer der in Definition 7 angegebenen Produktbildung sind noch weitere Produkte möglich, wie z. B. das direkte Produkt. Es ist folgendermaßen definiert:

Definition 8: Als direktes Produkt der Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})_{(m,n)}$ mit der Matrix $\mathfrak{A}' = (a'_{i'k'})_{(m',n')}$ bezeichnet man das Produkt

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}' &= (c_{ii'kk'}) \\ \text{mit} \quad c_{ii'kk'} &= a_{ik}\, a'_{i'k'}\,. \end{aligned}\right\} \tag{4,12}$$

Jeder Kombination ii' entspricht eine Zeile, jeder Kombination kk' eine Spalte der Produktmatrix.

Beispiel: Es sei $\mathfrak{A} = (a_{ik})_{(2,2)}, \quad \mathfrak{A}' = (a'_{i'k'})_{(2,2)}$,

dann ist
$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\,a'_{11} & a_{11}\,a'_{12} & a_{12}\,a'_{11} & a_{12}\,a'_{12} \\ a_{11}\,a'_{21} & a_{11}\,a'_{22} & a_{12}\,a'_{21} & a_{12}\,a'_{22} \\ a_{21}\,a'_{11} & a_{21}\,a'_{12} & a_{22}\,a'_{11} & a_{22}\,a'_{12} \\ a_{21}\,a'_{21} & a_{21}\,a'_{22} & a_{22}\,a'_{21} & a_{22}\,a'_{22} \end{pmatrix}. \tag{4,13}$$

Die erste Zeile wird man als „1,1-Zeile“, die zweite als „1,2-Zeile“, die dritte als „2,1-Zeile“, die vierte als „2,2-Zeile“ bezeichnen und entsprechend die Spalten.

Es gilt Satz 10: Das Matrizenprodukt zweier direkter Produkte ist das direkte Produkt der beiden Matrizenprodukte,

d. h.
$$(\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}')(\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}') = \mathfrak{A}\mathfrak{B} \times \mathfrak{A}'\mathfrak{B}'. \tag{4,14}$$

Beweis: Es sei $\mathfrak{A} = (a_{ik}), \quad \mathfrak{A}' = (a'_{i'k'}), \quad \mathfrak{B} = (b_{ik}), \quad \mathfrak{B}' = (b'_{i'k'})$,

dann ist
$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}' = (a_{ik}\, a'_{i'k'}),$$
$$\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}' = (b_{ik}\, b'_{i'k'})$$

und
$$\begin{aligned} (\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}')(\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}') &= (a_{ik}\, a'_{i'k'}) \cdot (b_{ik}\, b_{i'k'}) \\ &= (\sum_{\nu,\varrho} a_{i\nu}\, b_{\nu k}\, a'_{i'\varrho}\, b'_{\varrho k'}) \\ &= (\sum_{\nu} a_{i\nu}\, b_{\nu k} \sum_{\varrho} a'_{i'\varrho}\, b'_{\varrho k'})\,. \end{aligned} \tag{4,15}$$

Andererseits ist
$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (a_{ik}) \cdot (b_{ik}) = (\sum_{\nu} a_{i\nu}\, b_{\nu k}),$$
$$\mathfrak{A}'\,\mathfrak{B}' = (a'_{i'k'}) \cdot (b'_{i'k'}) = (\sum_{\varrho} a'_{i'\varrho}\, b'_{\varrho k'}),$$

also
$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} \times \mathfrak{A}'\mathfrak{B}' = (\sum_{\nu} a_{i\nu}\, b_{\nu k} \sum_{\varrho} a'_{i'\varrho}\, b_{\varrho k'})\,. \tag{4,16}$$

Aus der Gleichheit von (4,15) und (4,16) folgt (4,14).

Nach (4,12) läßt sich das direkte Produkt zweier Matrizen immer bilden; es entfallen also die in 4, b, c gemachten Einschränkungen bezüglich der Zeilen- und Spaltenanpassung.

f) Invarianz gegenüber Permutationen der Indizes

Es seien die beiden Matrizen $\mathfrak{A} = (a_{ik})_{(m,n)}$ und $\mathfrak{B} = (b_{ik})_{(m,n)}$ gegeben. Wird nun in diesen Matrizen ein und dieselbe Permutation der Zeilen und Spalten durchgeführt, so bleiben die Gleichungen der Addition (3,2) und Multiplikation (4,3) ungeändert. Bei der Addition ist es trivial; bei der Multiplikation folgt es daraus, daß man den Summationsindex auch über die permutierte Reihenfolge der Indizes laufen lassen kann. Das bedeutet aber, daß jede durch wiederholte Anwendung von Additionen und Multiplikationen entstehende Gleichung zwischen Matrizen gegen eine auf beide Indizes angewandte Permutation invariant ist (Isomorphismus).

5. Nullmatrix, Einheitsmatrix, Diagonalmatrix

a) Nullmatrix

Definition 9: Eine Matrix, deren Elemente sämtlich gleich Null sind, heißt Nullmatrix. Sie wird mit 0 bezeichnet.
Es ist also

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & & & \dots \\ 0 & \dots & \dots & & 0 \end{pmatrix} = 0\,, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\,, \quad (0\ 0\ 0) = 0\,. \tag{5,1}$$

Als Folge von Gleichung (3,2) gilt für eine beliebige Matrix $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} + 0 = 0 + \mathfrak{A} = \mathfrak{A}\,, \tag{5,2}$$

und als Folge von Gleichung (4,3)

$$\mathfrak{A} \cdot 0 = 0 \cdot \mathfrak{A} = 0\,. \tag{5,3}$$

Im Gegensatz zu den gewöhnlichen Zahlen folgt aus $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0$ oder $\mathfrak{B}\mathfrak{A} = 0$ im allgemeinen noch nicht $\mathfrak{A} = 0$ oder $\mathfrak{B} = 0$ (vgl. 4b Beispiel 2).
So ist z. B. das Produkt der beiden nichtverschwindenden Matrizen

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \quad (a, b, c, d \text{ beliebig})$$

gleich Null. Wenn es zu einer Matrix $\mathfrak{A}$ eine andere von 0 verschiedene $\mathfrak{B}$ gibt, so daß entweder $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0$ oder $\mathfrak{B}\mathfrak{A} = 0$ ist, so heißt $\mathfrak{A}$ ein Teiler der Null oder Nullteiler.

b) Einheitsmatrix

Definition 10: Sind alle Elemente $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ der Hauptdiagonale gleich 1 und alle übrigen Elemente gleich 0, so heißt die Matrix Einheitsmatrix; sie wird mit $\mathfrak{E}$ bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{E}\,. \tag{5,4}$$

Die Anzahl n der in der Diagonale vorhandenen 1-Elemente gibt die Ordnung der Matrix an, so daß genauer geschrieben wird: $\mathfrak{E}_n$.

Beispiel: $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{E}_3.$$

Mit Benutzung des KRONECKERschen Deltasymbols

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ für } i \neq k \\ 1 \text{ für } i = k \end{cases} \tag{5,5}$$

läßt sich eine Einheitsmatrix durch $(\delta_{ik})_n = \mathfrak{E}_n$ (5,6)
darstellen.

Satz 11: Ist $\mathfrak{A}$ eine beliebige Matrix $(a_{ik})_{(n,n)}$, so ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{E} = \mathfrak{E}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}. \tag{5,7}$$

Beweis: Das allgemeine Element der Produktmatrix ist:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}\,\delta_{\nu k} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{\nu=1}^{n} \delta_{i\nu}\,a_{\nu k}.$$

Wegen (5,5) sind alle Glieder der Summe gleich Null, außer für $\nu = k$, bzw. $\nu = i$, d. h. aber, es ist $\delta_{kk} = \delta_{ii} = 1$,

$$\sum_{\nu} a_{i\nu}\,\delta_{\nu k} = \sum_{\nu} \delta_{i\nu}\,a_{\nu k} = a_{ik}.$$

Die Einheitsmatrix ist also mit jeder Matrix vertauschbar; es ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{E} = \mathfrak{E}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}. \tag{5,8}$$

Speziell folgt aus (5,7): $\mathfrak{E}\mathfrak{E} = \mathfrak{E}$. (5,9)

Die gewöhnliche Zahl ist in der Matrizenrechnung folgendermaßen definiert:

Definition 11: Es sei c eine gewöhnliche Zahl, dann ist c durch folgende Matrix darstellbar:

$$c = (c\,\delta_{ik}). \tag{5,10}$$

Sie geht aus $\mathfrak{E}$ durch Multiplikation jedes Elements mit c hervor. c heißt auch skalare Matrix.

Das Produkt der Zahl c mit der Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ ist gegeben durch

$$c\mathfrak{A} = (\sum_{\nu} c\,\delta_{i\nu}\,a_{\nu k}) = (c\,a_{ik}), \tag{5,11}$$

d. h., jedes Element von $c\mathfrak{A}$ entsteht aus dem von $\mathfrak{A}$ durch Multiplikation mit der Zahl c (vgl. skalare Multiplikation).

c) Diagonalmatrix

Definition 12: Eine Diagonalmatrix ist eine Matrix, deren Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen verschwinden; die Hauptdiagonale selbst kann von 1 verschiedene Elemente enthalten. Die Diagonalmatrix wird mit $\mathfrak{D}$ bezeichnet.

Es ist also
$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & d_{nn} \end{pmatrix} = (d_{ik}\,\delta_{ik}) = \mathfrak{D}_n. \tag{5,12}$$

Die Einheitsmatrix ist ein spezieller Fall der Diagonalmatrix.

Beispiel 1:
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{D}_3.$$

Satz 12: Diagonalmatrizen sind miteinander vertauschbar; ihr Produkt ist wieder eine Diagonalmatrix.

Beweis: Es sei
$$\mathfrak{D} = (d_{ik}\,\delta_{ik}), \quad \mathfrak{D}' = (d'_{ik}\,\delta_{ik}),$$
dann ist
$$\mathfrak{D}\mathfrak{D}' = (d_{ik}\,\delta_{ik}) \cdot (d'_{ik}\,\delta_{ik})$$
$$= (\sum_\nu d_{i\nu}\,\delta_{i\nu}\,d'_{\nu k}\,\delta_{\nu k}) = (d_{ii}\,d'_{ii}), \tag{5,13}$$
da nur die Glieder von Null verschieden sind, für die $\nu = i = k$ ist; entsprechend ist
$$\mathfrak{D}'\mathfrak{D} = (\sum_\nu d'_{i\nu}\,\delta_{i\nu}\,d_{kk}\,\delta_{\nu k}) = (d'_{ii}\,d_{ii}) = (d_{ii}\,d'_{ii}),$$
also folgt
$$\mathfrak{D}\mathfrak{D}' - \mathfrak{D}'\mathfrak{D} = 0.$$

Die Multiplikation von Diagonalmatrizen geschieht in der Weise, daß entsprechende Diagonalelemente miteinander multipliziert werden.

Beispiel 2. Es sei $\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{D}' = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$

dann ist
$$\mathfrak{D}\mathfrak{D}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathfrak{D}'\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Satz 13. Umkehrung. Ist eine Matrix $\mathfrak{A}$ mit einer Diagonalmatrix von ungleichen Diagonalelementen vertauschbar, so ist $\mathfrak{A}$ selber eine Diagonalmatrix.

Beweis: Es sei
$$\mathfrak{A} = (a_{ik}), \quad \mathfrak{D} = (d_{ik}\,\delta_{ik}),$$
dann ist
$$\mathfrak{A}\mathfrak{D} = (\sum_\nu a_{i\nu}\,d_{\nu k}\,\delta_{\nu k}) = (a_{ik}\,d_{kk}) \tag{5,14}$$
und
$$\mathfrak{D}\mathfrak{A} = (\sum_\nu d_{i\nu}\,\delta_{i\nu}\,a_{\nu k}) = (d_{ii}\,a_{ik}). \tag{5,15}$$

Da $\mathfrak{A}\mathfrak{D} - \mathfrak{D}\mathfrak{A} = 0$ sein soll, so folgt: $a_{ik}\,(d_{kk} - d_{ii}) = 0$. Es ist aber $d_{kk} \neq d_{ii}$ nur für $i \neq k$, also muß $a_{ik} = 0$ sein für $i \neq k$, d. h. $\mathfrak{A}$ ist eine Diagonalmatrix.

Die Gleichungen (5,14) und (5,15) enthalten zugleich die Regel für die hintere bzw. vordere Multiplikation einer beliebigen Matrix mit einer Diagonalmatrix.

Gleichung (5,14) besagt: Das Produkt ist diejenige Matrix, deren Elemente das Produkt aus einem Element der *Spalte* von $\mathfrak{A}$ mit dem entsprechenden Element der Diagonalmatrix sind.

Beispiel: $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\, d_{11} & a_{12}\, d_{22} \\ a_{21}\, d_{11} & a_{22}\, d_{22} \end{pmatrix}.$$

Entsprechend besagt Gleichung (5,15): Das Produkt ist diejenige Matrix, deren Elemente das Produkt aus einem Element der *Reihe* von $\mathfrak{A}$ mit dem entsprechenden Element der Diagonalmatrix sind,

Beispiel: $$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\, d_{11} & a_{21}\, d_{11} \\ a_{21}\, d_{22} & a_{22}\, d_{22} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3: Es sei
$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

dann ist $$\mathfrak{A}\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 0 \\ 1 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

und $$\mathfrak{D}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 8 & 6 \\ 9 & 6 & 15 \end{pmatrix}.$$

Sind speziell die Diagonalelemente komplexe Zahlen vom Betrag 1, so spricht man von einer Phasenmatrix:

$$\mathfrak{P} = (e^{j\varphi_i}\, \delta_{ik}), \quad j = \sqrt{-1}. \tag{5,16}$$

6. Determinante einer quadratischen Matrix

Jeder quadratischen Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ ordnen wir eine Zahl zu, ihre Determinante:

$$\det \mathfrak{A} = |\mathfrak{A}| = \det (a_{ik}) = |a_{ik}|. \tag{6,1}$$

Diese Determinante geht formal aus der Matrix hervor, indem man einfach die Matrizenklammern durch Determinantenstriche ersetzt und im übrigen jedes Element an seiner Stelle läßt.

Die Determinante ist folgendermaßen definiert:

Definition 15: Unter der Determinante der (n, n)-reihigen Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ versteht man den Ausdruck

$$|\mathfrak{A}| = |a_{ik}| = \sum_{\mathrm{P}} sgn\, \mathrm{P}\, a_{1\mathrm{P}_1}, \ldots, a_{n\mathrm{P}_n}, \tag{6,2}$$

erstreckt über alle Permutationen $\mathrm{P} = \binom{i}{\mathrm{P}_i}$ der Spalten und Indizes $1, \ldots, n$ ($sgn\, \mathrm{P} = \pm 1$).

Es wird also die Determinante $|\mathfrak{A}|$ von $\mathfrak{A}$ in folgender Weise gebildet: man wendet bei festgehaltenen ersten (Zeilen-) Indizes in dem Produkt $a_{11}, \ldots, a_{nn}$

der n in der Hauptdiagonale stehenden Elemente auf die zweiten (Spalten-) Indizes alle Permutationen $\mathrm{P} = \binom{i}{\mathrm{P}_i}$ an; dadurch entstehen $n!$ Produkte der Form $a_{1\mathrm{P}_1}, \ldots, a_{n\mathrm{P}_n}$. Sodann bildet man die Differenz

$$\sum_{\mathrm{P}\ \text{gerade}} a_{1\mathrm{P}_1}, \ldots, a_{n\mathrm{P}_n} - \sum_{\mathrm{P}\ \text{ungerade}} a_{1\mathrm{P}_1}, \ldots, a_{n\mathrm{P}_n} = \sum_{\mathrm{P}} sgn\, \mathrm{P}\, a_{1\mathrm{P}_1}, \ldots, a_{n\mathrm{P}_n}$$

der Summe aller den *geraden* Permutationen entsprechenden und der Summe aller den *ungeraden* Permutationen entsprechenden Produkte.

Für die Determinanten gelten folgende Hauptsätze:

Satz 14: Eine Determinante ändert ihren Wert nicht, wenn die Zeilen als Spalten und die Spalten als Zeilen geschrieben werden.

Beispiel:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{6,3}$$

Satz 15: Eine Determinante ist ihrem Werte nach Null, wenn die Elemente einer Parallelreihe alle verschwinden.

Beispiel:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0. \tag{6,4}$$

Satz 16: Eine Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn man zwei ihrer Parallelreihen vertauscht.

Beispiel:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = A, \quad \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{12} \end{vmatrix} = -A. \tag{6,5}$$

Satz 17: Eine Determinante ist Null, wenn zwei Parallelreihen übereinstimmen.

Beispiel:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{6,6}$$

Satz 18: Werden alle Elemente einer Parallelreihe mit einer Konstanten k multipliziert, so wird die Determinante mit k multipliziert.

Beispiel:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{6,7}$$

Satz 19: Eine Determinante verschwindet, wenn die Elemente einer Parallelreihe proportional den entsprechenden Elementen einer anderen sind.

Beispiel:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} & a_{13} \\ a_{21} & ka_{21} & a_{23} \\ a_{31} & ka_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \tag{6,8}$$

Satz 20: Sind in einer Determinante A die Elemente einer Parallelreihe Aggregate von je g Gliedern, so läßt sich diese Determinante in ein Aggregat von g De-

terminanten $A_1, \ldots, A_g$ zerlegen, die mit A übereinstimmen und nur an Stelle der zusammengesetzten Parallelreihen je eines der g Glieder enthält.

Beispiel:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \alpha_1 & a_{13} \\ a_{21} & \alpha_2 & a_{23} \\ a_{31} & \alpha_3 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \beta_1 & a_{13} \\ a_{12} & \beta_2 & a_{23} \\ a_{31} & \beta_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha_1 + \beta_1 & a_{13} \\ a_{21} & \alpha_2 + \beta_2 & a_{23} \\ a_{31} & \alpha_3 + \beta_3 & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{6,9}$$

Satz 21: Eine Determinante bleibt unverändert, wenn man zu den Elementen einer Parallelreihe die mit einer beliebigen Zahl k multiplizierten entsprechenden Elemente einer anderen Parallelreihe addiert.

Beispiel:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + k a_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + k a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + k a_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \tag{6,10}$$

Für die Berechnung und Anwendung der Determinanten ist die Unterdeterminante wichtig. Sie ist folgendermaßen definiert:

Definition 14: Unter der dem Element a_{ik} adjungierten Unterdeterminante A_{ik} versteht man die mit dem Vorzeichen $(-1)^{i+k}$ versehene Determinante $(n-1)$-Grades, die entsteht, wenn man in der gegebenen Determinante die i-Zeile und k-Spalte streicht.

Die Darstellung der Determinante mit Hilfe der adjungierten Unterdeterminante ist durch den Laplaceschen Entwicklungssatz festgelegt.

Er lautet (für Entwicklung nach einer Zeile bzw. Spalte):

Satz 22: Multipliziert man jedes Element einer Zeile (Spalte) mit seiner adjungierten Unterdeterminante, so ist die Determinante gleich der Summe dieser n Produkte.

$$|\mathfrak{A}| = |a_{ik}| = \sum_{\nu=1}^{n} a_{r\nu} A_{r\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu r} A_{\nu r}. \tag{6,11}$$

Dagegen gilt

Satz 23: Multipliziert man die Elemente einer Zeile (Spalte) mit den adjungierten Unterdeterminanten der entsprechenden Elemente einer anderen Zeile (Spalte), so ist die Summe dieser Produkte gleich Null:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{r\nu} A_{s\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu r} A_{\nu s} = 0, \qquad r \neq s. \tag{6,12}$$

Gleichung (6,11) und (6,12) können wegen (5,5) auch in folgender Weise zusammengefaßt werden:

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{r\nu} A_{s\nu} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu r} A_{\nu s} = \delta_{rs} |\mathfrak{A}|. \tag{6,13}$$

Für die Determinante einer Diagonalmatrix gilt folgender

Satz 24: Sind alle Elemente auf einer Seite der Hauptdiagonalen Null, so ist die Determinante ihrem Wert nach gleich dem Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen.

Beispiel:
$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}, \qquad |\mathfrak{D}| = d_{11} \cdot d_{22} \cdot d_{33}. \tag{6,14}$$

Die Determinante der Einheitsmatrix ist 1: $|\mathfrak{E}_n| = 1$. (6,15)

Wegen der Vertauschbarkeit der Faktoren in einem Produkt von Zahlen gilt

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}| = |\mathfrak{B}\mathfrak{A}|, \tag{6,16}$$

und es ist

$$|\mathfrak{A}\mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}| \cdot |\mathfrak{B}|. \tag{6,17}$$

Satz 25: Die bezüglich eines beliebigen ihrer Elemente gebildete Abgeleitete einer Determinante ist gleich der Unterdeterminante des betreffenden Elementes. Sind in $A = |a_{ik}|$ die a alle Funktionen von einer Variablen x, so kann man schreiben:

$$\frac{dA}{dx} = \sum_{ik} \frac{\partial A}{\partial a_{ik}} \cdot \frac{da_{ik}}{dx} = \sum_{ik} A_{ik} \frac{da_{ik}}{dx}. \tag{6,18}$$

Die Summe erstreckt sich über n^2 Glieder $i, k = 1, \ldots, n$. Z. B. ist mit

$$\frac{da_{ik}}{dx} = a'_{ik} \quad \text{für} \quad n = 3$$

$$\frac{dA}{dx} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} \end{vmatrix}.$$

Entprechendes gilt für höhere Ableitungen.
Wegen der Beweise der Sätze 14 bis 25 sei auf die Lehrbücher über Determinanten verwiesen (s. Literaturverzeichnis).

7. Das Adjunkten-Produkt

Nach (6,13) war

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} A_{k\nu} = \delta_{ik} |\mathfrak{A}|.$$

Ist nun die Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ gegeben, so läßt sich durch Bildung der entsprechenden adjungierten Unterdeterminanten A_{ik} der Determinante $|\mathfrak{A}|$ die Matrix (A_{ik}) bilden. Nach dem Produktsatz (4,3) ist

$$(a_{ik}) \cdot (A_{ik}) = \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} A_{\nu k}\right).$$

Werden in A_{ik} Zeilen und Spalten zur Matrix $\mathfrak{A}'_{ik}$ vertauscht, so stellt $(\delta_{ik} |\mathfrak{A}|)$ eine Produktmatrix dar und zwar ist

$$(a_{ik}) \cdot (\mathfrak{A}'_{ik}) = \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} A'_{\nu k}\right) = \mathfrak{E}_n |\mathfrak{A}|. \tag{7,1}$$

Beispiel: Es sei

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \quad |\mathfrak{A}| = 18,$$

dann ist

$$(A_{ik}) = \begin{pmatrix} 14 & -13 & 10 \\ 8 & -1 & -2 \\ -10 & 8 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (A_{ki}) = (A'_{ik}) = \begin{pmatrix} 14 & 8 & -10 \\ -13 & -1 & 8 \\ 10 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

daraus folgt

$$(a_{ik}) \cdot (A'_{ik}) = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} = 18 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 18 \cdot \mathfrak{E}_3 .$$

8. Untermatrizen und Übermatrizen

Der Bildung von Unterdeterminanten ist analog die Bildung von Untermatrizen.

Definition 15: Eine Matrix, die durch Unterteilung einer vorgegebenen Matrix – (durch horizontale und vertikale Striche) – entsteht, heißt Untermatrix. Die Elemente der Matrix sind dann selber Matrizen. Eine Matrix von Matrizen wird auch Übermatrix genannt. So kann z. B. die Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

auf vierfache Weise unterteilt werden:

$$\left(\begin{array}{c:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right),$$

$$\left(\begin{array}{c:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right), \qquad \left(\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hdashline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right).$$

Untermatrizen können addiert werden, als ob sie Elemente einer Matrix wären.

Beispiel 1:
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 8 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc:c} \multicolumn{2}{c:}{2\,\mathfrak{E}_2} & \begin{matrix} 5 \\ 8 \end{matrix} \\ \hdashline 5 & -2 & -1 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc:c} \multicolumn{2}{c:}{4\,\mathfrak{E}_2} & \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \\ \hdashline 1 & 8 & 7 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc:c} \multicolumn{2}{c:}{6\,\mathfrak{E}_2} & \begin{matrix} 6 \\ 6 \end{matrix} \\ \hdashline 6 & 6 & 6 \end{array}\right) = 6 \cdot \left(\begin{array}{cc:c} \multicolumn{2}{c:}{\mathfrak{E}_2} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \\ \hdashline 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Die Multiplikationsregel (4,3) bleibt auch erhalten.
Sind z. B. $\mathfrak{A}_{ik}$, $\mathfrak{B}_{ik}$ Matrizen $(i, k = 1, 2)$, so ist das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{A}_{12} \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{11} & \mathfrak{B}_{12} \\ \mathfrak{B}_{21} & \mathfrak{B}_{22} \end{pmatrix} = \left(\sum_{\nu=1}^{2} \mathfrak{A}_{i\nu} \mathfrak{B}_{\nu k} \right) = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_{11}\mathfrak{B}_{11} + \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{B}_{21} & \mathfrak{A}_{11}\mathfrak{B}_{12} + \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{B}_{22} \\ \mathfrak{A}_{21}\mathfrak{B}_{11} + \mathfrak{A}_{22}\mathfrak{B}_{21} & \mathfrak{A}_{21}\mathfrak{B}_{12} + \mathfrak{A}_{22}\mathfrak{B}_{22} \end{pmatrix}. \quad (8,1)$$

Voraussetzung für die Existenz des Produktes ist, daß die $\mathfrak{A}_{i\nu}$, $\mathfrak{B}_{\nu k}$ verkettet sind. Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_{(m,n)}$ und $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_{(n,p)}$ gegeben, so kann z. B. $\mathfrak{A}$ durch $n - 1$ Vertikallinien in $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ unterteilt werden und es ist

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_1 \,\vdots\, \mathfrak{A}_2 \,\vdots\, \ldots \,\vdots\, \mathfrak{A}_n) . \quad (8,2)$$

Um $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ bilden zu können, muß daher $\mathfrak{B}$ durch $n-1$ Horizontallinien in $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_n$ unterteilt werden und es ist

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_1 \\ \hdashline \mathfrak{B}_2 \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \mathfrak{B}_n \end{pmatrix}. \tag{8,3}$$

$\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_n\mathfrak{B}_n$ sind dann identisch, da $\sum \mathfrak{A}_{i\nu}\mathfrak{B}_{\nu k}$ nur aufgeteilt wurde.

Beispiel 2: Es sei $\quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Dann ist nach Unterteilung

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \left(\begin{array}{c:c:c} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \hdashline 0 & 3 \\ \hdashline 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (2 \;\; 1) + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0 \;\; 3) + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (4 \;\; 1)$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 8 & 15 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Zu demselben Ergebnis kann man auch durch folgende Unterteilung kommen:

Beispiel 3:

$$\left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ \hdashline 3 & 1 & 0 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ \hdashline 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (4 \;\; 1) \\ \hdashline (3 \;\; 1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + (0) \cdot (4 \;\; 1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ \hdashline (6 \;\; 6) + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 8 & 15 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall. Gegeben sei die Matrix $\mathfrak{A}_{(m,n)}$.

Den Index m spalten wir in die beiden r und ϱ auf; und zwar wird die Zahlenreihe $m = 1, 2, 3, \ldots$ zunächst in Gruppen mit den Nummern $r = 1, 2, \ldots$ zu je $g_1, g_2, \ldots, g_r, \ldots$ Zahlen geteilt und es werden die Zahlen jeder Gruppe mit $\varrho = 1, 2, \ldots, g_r$, durchnumeriert:

In gleicher Weise wird der Index n in s, σ mit den Teilungszahlen $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots \bar{g}_s, \ldots$ aufgespalten.

Das Element der Matrix $\mathfrak{A}_{(m,n)} = \mathfrak{A}^{(r,s)}_{\varrho,\sigma}$ kann dann als Element einer rechteckigen Matrix

$$\mathfrak{A}^{(r,s)} = \begin{pmatrix} A^{(r,s)}_{11} & A^{(r,s)}_{12} & \ldots & A^{(r,s)}_{1\bar{g}_s} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A^{(r,s)}_{g_r 1} & A^{(r,s)}_{g_r 2} & \ldots & A^{(r,s)}_{g_r \bar{g}_s} \end{pmatrix} \tag{8,4}$$

von g_r Zeilen und $\bar{g}_s$ Spalten aufgefaßt werden und $\mathfrak{A}_{(m,n)}$ stellt dann folgende Übermatrix dar:

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^{(r,s)}) = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^{(1,1)} & \mathfrak{A}^{(1,2)} & \ldots \\ \mathfrak{A}^{(2,1)} & \mathfrak{A}^{(2,2)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{8,5}$$

Die $\mathfrak{A}^{(r,s)}$ sind die Untermatrizen (auch Teilmatrizen).

Sind zwei Übermatrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit den Teilungszahlen $g_r, \bar{\bar{g}}_t$ und $\bar{\bar{g}}_t, \bar{g}_s$ gegeben, wobei also die Spaltenteilung von $\mathfrak{A}$ mit der Zeilenteilung von $\mathfrak{B}$ übereinstimmt, so ist das Element des Produktes

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^{(r,s)}_{\varrho\sigma} = \sum_{\nu} \sum_{\mu}^{\bar{\bar{g}}_t} \mathfrak{A}^{(r,\nu)}_{\varrho\mu} \mathfrak{B}^{(\nu,s)}_{\mu\sigma} = (\sum_{\nu} \mathfrak{A}^{(r,\nu)} \mathfrak{B}^{(\nu,s)})_{\varrho\sigma}; \tag{8,6}$$

damit wird

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (\mathfrak{A}^{(r,s)}) \cdot (\mathfrak{B}^{(r,s)}) = (\sum_{\nu} \mathfrak{A}^{(r,\nu)} \mathfrak{B}^{(\nu,s)}) \tag{8,7}$$

eine Matrizenmatrix mit den Teilungszahlen $g_r, \bar{g}_s$.

Sind die Zeilen und Spalten einer Übermatrix in derselben Weise eingeteilt, d. h. ist $\bar{g}_s = g_r$, und sind für $r \neq s$ alle $\mathfrak{A}^{(r,s)} = 0$, so spricht man von einer Stufenmatrix:

$$\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}^{(r)} \delta_{rs}) = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^{(1)} & 0 & \ldots \\ 0 & \mathfrak{A}^{(2)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}. \tag{8,8}$$

Die Stufenmatrix ist eine Verallgemeinerung der Diagonalmatrix.

Es bestehen nun folgende Sätze:

Satz 26: Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ zwei Stufenmatrizen mit gleichen Stufen, d. h.

$$g_1 = \bar{g}_1 = \bar{\bar{g}}_1, \quad g_2 = \bar{g}_2 = \bar{\bar{g}}_2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}^{(r,s)} = \mathfrak{A}^{(r)} \delta_{rs}, \quad \mathfrak{B}^{(r,s)} = \mathfrak{B}^{(r)} \delta_{rs},$$

so ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ wieder eine Stufenmatrix derselben Art:

$$(\mathfrak{A}^{(r)} \delta_{rs}) \cdot \mathfrak{B}^{(r)} \delta_{rs}) = (\mathfrak{A}^{(r)} \mathfrak{B}^{(r)} \delta_{rs}). \tag{8,9}$$

Der Beweis folgt aus Satz 12.

Beispiel 4:

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc:cc} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{cc:cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} & & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \hdashline \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & & \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \end{array}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 0 \\ 10 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Satz 27: Ist $\mathfrak{M}$ eine beliebige Matrix und $\mathfrak{A}$ eine Stufenmatrix mit der Stufengröße g_r, wie (8,8), so kann man die Zeilen von $\mathfrak{M}$ ebenfalls nach je g_r, die Spalten nach beliebigen Zahlen $\bar{g}_s$ abteilen. Es wird dann nach (8,7)

$$\mathfrak{A}\mathfrak{M} = (\mathfrak{A}^{(r)}\mathfrak{M}^{(r,s)}); \tag{8,10}$$

analog ist

$$\mathfrak{M}\mathfrak{A} = (\mathfrak{M}^{(r,s)}\mathfrak{A}^{(s)}). \tag{8,11}$$

Da die Elemente selber Matrizen sind, sind sie im allgemeinen nicht vertauschbar.

Satz 28: Ist in (8,10) bzw. (8,11) $\mathfrak{A}^{(r)}$ ein Vielfaches der g_r-dimensionalen Einheitsmatrix

$$\mathfrak{A}^{(r)} = a^{(r)} \cdot \mathfrak{E}_{g_r},$$

so ist $\mathfrak{A}^{(r)}$ mit $\mathfrak{M}^{(r,s)}$ vertauschbar:

$$\varkappa = [\mathfrak{A}, \mathfrak{M}] = \mathfrak{A}\mathfrak{M} - \mathfrak{M}\mathfrak{A} = ((a^{(r)} - a^{(s)})\,\mathfrak{M}^{(r,s)}) \\ (a^{(r)} \neq a^{(s)} \text{ für } r \neq s). \tag{8,12}$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus Satz 11.

9. Der Rang einer Matrix

Es seien folgende Definitionen vorangestellt:

Definition 16: Unter dem Rang r einer endlichen (nicht notwendig quadratischen) Matrix $\mathfrak{A}$ versteht man die Zahl 0, wenn $\mathfrak{A} = 0$, und die größte unter den Gradzahlen der von Null verschiedenen Unterdeterminanten von $\mathfrak{A}$, falls $\mathfrak{A} \neq 0$ ist.

Definition 17: Unter dem Defekt d einer quadratischen Matrix der Ordnung n versteht man die Differenz $d = n - r$.

Definition 18: Eine quadratische Matrix heißt singulär (entartet), wenn $|\mathfrak{A}| = 0$, und regulär (nichtentartet), wenn $|\mathfrak{A}| \neq 0$.

Beispiel 1: Es sei
$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dann ist $|\mathfrak{A}| \neq 0$ ($\mathfrak{A}$ ist regulär), $r(\mathfrak{A}) = 3$, $d(\mathfrak{A}) = 0$.

Beispiel 2: Es sei $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$,

dann ist $|\mathfrak{A}| = 0$ ($\mathfrak{A}$ ist singulär), $r(\mathfrak{A}) = 2$, $d(\mathfrak{A}) = 1$.

Beispiel 3: Es sei $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & -2 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

dann ist $|\mathfrak{A}| = 0$ ($\mathfrak{A}$ ist singulär), $r(\mathfrak{A}) = 1$, $d(\mathfrak{A}) = 3$.

Es gelten dann folgende Sätze:

Satz 29: Für den Rang r einer Matrix $\mathfrak{A}_{(m,n)}$ bestehen die Relationen

$$0 \leq r(\mathfrak{A}) \leq m, \quad 0 \leq r(\mathfrak{A}) \leq n,$$

$r = 0$ ist laut Definition 16 gleichbedeutend mit $\mathfrak{A} = 0$.

Satz 30: Der Rang einer singulären Matrix der Ordnung n ist $r < n$, der einer regulären $r = n$.

Der Satz ist eine Folge der Definition 18.

Zur Feststellung, daß eine vorgelegte Matrix $\mathfrak{A}$ den Rang r hat, genügt es zu zeigen, daß alle $(r+1)$-reihigen Unterdeterminanten von $\mathfrak{A}$ verschwinden und eine r-reihige von Null verschieden ist. Der Nachweis gestaltet sich im allgemeinen einfacher, wenn man sich folgenden Satzes bedient:

Satz 31: Der Rang einer Matrix bleibt bei den drei Umformungen erhalten:

1. Vertauschung zweier Zeilen (oder auch Spalten),
2. Multiplikation aller Elemente einer Reihe mit demselben von Null verschiedenen Faktor,
3. Addition einer mit einem beliebigen Faktor multiplizierten Reihe zu einer parallelen Reihe.

Der Satz ist eine Folge der Sätze 16 bzw. 18 bzw. 21.

Satz 32: Der Rang einer Diagonalmatrix ist gleich der Anzahl der von Null verschiedenen Elemente der Diagonalmatrix.

Nach (6,14) ist $|\mathfrak{D}| = d_{11}, d_{22} \ldots d_{nn} \neq 0$ eine n-reihige Determinante. Es verschwindet aber jede $(n+1)$-reihige Determinante, weil sie mindestens eine aus lauter Nullen bestehende Reihe enthalten muß, d. h. es ist $r = n$.

Wie unten gezeigt wird, läßt sich eine Matrix $\mathfrak{A}$ auf die Diagonalform bringen, so daß Satz 32 erweitert werden kann zu

Satz 32': Der Rang einer Matrix $\mathfrak{A}$ ist die Anzahl der von Null verschiedenen Elemente der zugehörigen Diagonalmatrix.

Umgekehrt kann Satz 32' auch als Definition des Ranges betrachtet werden.

Satz 33: Hängen die Reihen einer singulären Matrix $\mathfrak{A}$ durch eine einzige lineare Beziehung zusammen, so hat die Matrix den Defekt 1; sind es q Beziehungen, so ist der Defekt q.

Beweis: Zunächst muß der Begriff lineare Abhängigkeit erläutert werden. Es seien Matrizen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ gleichen Typs gegeben und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ konstante Größen. Dann ist die Gleichung

$$\alpha_1 \mathfrak{A}_1 + \alpha_2 \mathfrak{A}_2 + \cdots + \alpha_n \mathfrak{A}_n = 0 \tag{9,1}$$

stets erfüllt, wenn alle $\alpha_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ sind.

Definition 19: Die $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ heißen linear abhängig, wenn eine Gleichung der Form (9,1) besteht und nicht alle $\alpha_i = 0$ sind. Ist diese Beziehung nur für alle $\alpha_i = 0$ erfüllt, so heißen die Matrizen voneinander linear unabhängig.

Es werde nun der Beweis für den Fall $d = 1$ erbracht, d.h. daß *eine* lineare Beziehung zwischen den Reihen bestehen soll.

Gegeben sei die quadratische Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{9,2}$$

Wegen der vorausgesetzten Singularität ist $|\mathfrak{A}| = 0$. Die Zeilen der Matrix $\mathfrak{A}$ werden nun als Untermatrizen aufgefaßt:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{A}_n \end{pmatrix}. \tag{9,3}$$

Die lineare Abhängigkeit wird dann durch die Gleichung (9,1) ausgedrückt; die α_i sind Konstante $\neq 0$.

Die einzelnen Summanden können nun folgendermaßen geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 \mathfrak{A}_1 &= (\alpha_1 a_{11} \ \ldots \ \alpha_1 a_{1n}) \\ &\vdots \\ \alpha_n \mathfrak{A}_n &= (\alpha_n a_{n1} \ \ldots \ \alpha_n a_{nn}) \end{aligned}\right\} \tag{9,4}$$

(9,1) wird daher

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu a_{\nu 1} \ \ldots \ \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu a_{\nu n}\right) = 0, \tag{9,5}$$

also ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu a_{\nu i} = 0, \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{9,6}$$

Nun ist nach (6,11)

$$|\mathfrak{A}| = \sum_{\nu=1}^{n} A_{\nu i} a_{\nu i} = 0. \tag{9,7}$$

Aus (9,6) und (9,7) folgt

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu a_{\nu i} = \sum_{\nu=1}^{n} A_{\nu i} a_{\nu i} = 0. \tag{9,8}$$

Da $\alpha_\nu \neq 0$, so folgt $A_{\nu i} \neq 0$.

Die $A_{\nu i}$ sind aber die adjungierten Unterdeterminanten (n-1)-Grades. Mithin ist der Rang von $\mathfrak{A}$

$$r(\mathfrak{A}) = n\text{-}1, \text{ d. h. der Defekt } d \text{ ist } d(\mathfrak{A}) = 1.$$

Über den Rang eines Produktes gelten folgende Sätze:

Satz 34: a) (Invarianz des Ranges.) Ist eine Matrix $\mathfrak{B}$ quadratisch und $|\mathfrak{B}| \neq 0$, so ändert sich der Rang einer regulären Matrix $\mathfrak{A}$ nicht, wenn $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}$ multipliziert wird:

$$r(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = r(\mathfrak{B}\mathfrak{A}) = r(\mathfrak{A}); \tag{9,9}$$

b) Ist $\mathfrak{B}$ beliebig (und auch $\mathfrak{A}$ beliebig), so kann durch Multiplikation mit $\mathfrak{B}$ der Rang nur verkleinert werden:

$$r(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \leq r(\mathfrak{A}), \tag{9,10'}$$
$$r(\mathfrak{B}\mathfrak{A}) \leq r(\mathfrak{A}). \tag{9,10''}$$

Beweis: a) Nach Voraussetzung ist $|\mathfrak{A}| \neq 0$ und $|\mathfrak{B}| \neq 0$. Ist n die Ordnung von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$, so ist nach Satz 30 $r(\mathfrak{A}) = r(\mathfrak{B}) = n$. Da nach (6,17) $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}|.|\mathfrak{B}| \neq 0$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ aber auch die Ordnung n hat, so folgt (9,9).

b) Ist $|\mathfrak{A}| \neq 0$ und $|\mathfrak{B}| = 0$, so ist $r(\mathfrak{A}) = n$, $r(\mathfrak{B}) < n$; da $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}| = 0$, so ist $r(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) < n$, d. h. es gilt (9,10') bzw. (9,10''). Ist auch $|\mathfrak{A}| = 0$, so ist ebenfalls $r(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) < n$.

Satz 35: Der Defekt des Produktes zweier Matrizen ist mindestens gleich dem Defekt eines der beiden Faktoren und höchstens gleich der Summe der Defekte beider Faktoren.

Beweis: Ist n die Ordnung einer Matrix $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$, so ist wegen $d = n - r$

$$0 \leq d \leq n. \tag{9,11}$$

Nach Satz 34 war $\quad r(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \leq r(\mathfrak{A})$;

andererseits ist aber $r(\mathfrak{B}) \leq n$. Daher folgt

$$r(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) + n \geq r(\mathfrak{A}) + r(\mathfrak{B}), \tag{9,12}$$

oder
$$n - r(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \leq n - r(\mathfrak{A}) + n - r(\mathfrak{B}),$$

d. h.
$$d(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \leq d(\mathfrak{A}) + d(\mathfrak{B}). \tag{9,13}$$

Wegen (9,11) kann $d(\mathfrak{A})$ bzw. $d(\mathfrak{B})$ gleich Null sein, so daß $d(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ mindestens gleich dem Defekt eines der Faktoren wird.

Satz 36 (SYLVESTER-Gesetz): Ist das Produkt zweier quadratischer Matrizen Null, so kann die Summe ihrer Ränge die Ordnung nicht überschreiten.

Beweis: Ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0$, so folgt $|\mathfrak{A}\mathfrak{B}| = 0$ und $r(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = 0$, daher ist wegen (9,12) $r(\mathfrak{A}) + r(\mathfrak{B}) \leq n$.

Satz 37: Ist das Produkt zweier quadratischer Matrizen Null und ist $\mathfrak{A} \neq 0$, $\mathfrak{B} \neq 0$, so sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ singulär.

Wegen Satz 36 ist $r(\mathfrak{A}) + r(\mathfrak{B}) \leq n$, d. h. es muß sowohl $r(\mathfrak{A})$ als auch $r(\mathfrak{B}) < n$ sein, d. h. aber $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind singulär.

B e i s p i e l 4 (zu Satz 36 und 37):

$$\text{Es sei } \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$

dann ist $|\mathfrak{A}| = 0,\ |\mathfrak{B}| = 0,\ \mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0,\ r(\mathfrak{A}) = 1,\ r(\mathfrak{B}) = 2$

und $r(\mathfrak{A}) + r(\mathfrak{B}) = 3.$

Über die Produktdarstellung singulärer Matrizen gilt folgender Satz:

S a t z 38: Eine quadratische Matrix $\mathfrak{A}$ der Ordnung n und des Ranges r kann dargestellt werden durch $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\mathfrak{C}$, wobei $\mathfrak{B}$ die Ordnung (n, r) und $\mathfrak{C}$ die Ordnung (r, n) hat.

Der Satz ist eine Folge von Satz 8.

B e i s p i e l 5:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

hat den Rang $r(\mathfrak{A}) = 2$. Sie kann daher dargestellt werden durch das Produkt

$$\mathfrak{A}_{(3,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}_{(3,2)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}_{(2,3)}.$$

10. Reziproke Matrizen und Division

D e f i n i t i o n 20: Zu einer regulären Matrix $\mathfrak{A}$ $(|\mathfrak{A}| \neq 0)$ gibt es eine eindeutig bestimmte reziproke oder inverse Matrix $\mathfrak{A}^{-1}$, so daß

$$\mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{E} \tag{10,1}$$

ist. Dann folgt

S a t z 39: Liegt eine singuläre Matrix vor $(|\mathfrak{A}| = 0)$, so kann keine Reziproke existieren.

Denn wegen (10,1) und (6,17) ist

$$|\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}^{-1}| \cdot |\mathfrak{A}| = |\mathfrak{E}| = 1 \tag{10,2}$$

unvereinbar mit $|\mathfrak{A}| = 0$.

S a t z 40: Der Wert der Determinante der Matrix $\mathfrak{A}^{-1}$ ist der reziproke der von $\mathfrak{A}$, d. h.

$$|\mathfrak{A}^{-1}| = |\mathfrak{A}|^{-1}, \tag{10,3}$$

da $|\mathfrak{E}| = 1$ ist.

S a t z 41: Es ist

$$(\mathfrak{A}^{-1})^{-1} = \mathfrak{A}. \tag{10,4}$$

Denn setzen wir in (10,1) $\mathfrak{A}$ statt $\mathfrak{A}^{-1}$, so ist

$$(\mathfrak{A}^{-1})^{-1} \cdot \mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{E}$$

und Multiplikation von rechts mit $\mathfrak{A}$ ergibt (10,4).

Satz 42: Gilt (10,1), so gilt auch

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{E}. \tag{10,5}$$

Denn multiplizieren wir (10,1) von rechts mit $\mathfrak{A}^{-1}$, so ist

$$\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}^{-1}$$

und dies von links mit der reziproken von $\mathfrak{A}^{-1}$ nach (10,4) multipliziert, ergibt

$$(\mathfrak{A}^{-1})^{-1}\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = (\mathfrak{A}^{-1})^{-1}\mathfrak{A}^{-1};$$

da $(\mathfrak{A}^{-1})^{-1}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{E}$, so folgt $$\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{E}, \tag{10,1'}$$

d. h. reziproke Matrizen sind miteinander vertauschbar.

Satz 43: Zu $\mathfrak{A}$ gibt es nur eine reziproke Matrix.

Angenommen, es wäre $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}_1^{-1} = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}_2^{-1} = \mathfrak{E}$, wobei $\mathfrak{A}_1^{-1}$ und $\mathfrak{A}_2^{-1}$ die beiden Reziproken wären, so muß sein:

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{A}_1^{-1} - \mathfrak{A}_2^{-1}) = 0.$$

Durch vordere Multiplikation mit $\mathfrak{A}_1^{-1}$ wird

$$\mathfrak{A}_1^{-1}\mathfrak{A}(\mathfrak{A}_1^{-1} - \mathfrak{A}_2^{-1}) = \mathfrak{A}_1^{-1}\,0 = 0$$

oder $$\mathfrak{E}(\mathfrak{A}_1^{-1} - \mathfrak{A}_2^{-1}) = \mathfrak{A}_1^{-1} - \mathfrak{A}_2^{-1} = 0,$$

d. h. $$\mathfrak{A}_1^{-1} = \mathfrak{A}_2^{-1}.$$

Satz 44: Die Reziproke des Produktes $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist gegeben durch

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^{-1} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^{-1}. \tag{10,6}$$

Beweis: Es ist $$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^{-1}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^{-1} = \mathfrak{E}.$$

Durch vordere Multiplikation mit $\mathfrak{A}^{-1}$ wird

$$\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^{-1} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{E},$$

und weitere vordere Multiplikation mit $\mathfrak{B}^{-1}$ ergibt

$$\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^{-1} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{E},$$

d. h. aber es gilt (10,6).

Liegt ein mehrfaches Produkt vor, so gilt

$$\cdots\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{E} \tag{10,7}$$

und $$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\cdots)^{-1} = \cdots\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^{-1}. \tag{10,8}$$

Die Bestimmung von $\mathfrak{A}^{-1}$ ist gleichbedeutend mit der Auflösung der linearen Gleichung

$$\mathfrak{A}\mathfrak{X} = \mathfrak{E}, \tag{10,9}$$

da im Falle der Lösbarkeit $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}^{-1}$ ist.

Wegen (10,9) ist $$|\mathfrak{A}|\cdot|\mathfrak{X}| = |\mathfrak{E}| = 1. \tag{10,10}$$

Wenn wir eine Matrix $\mathfrak{X}$ gefunden haben, die der Gleichung (10,9) genügt, dann muß ihre Determinante die Gleichung (10,10) befriedigen. Daraus folgt, daß (10,9) unlösbar ist, wenn $|\mathfrak{A}| = 0$ ist.

Um die Lösbarkeit von (10,9) zu untersuchen, sei

$$\mathfrak{A} = (a_{ik})_{(n,n)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{X} = (x_{ik})_{(n,n)}, \tag{10,11}$$

dann ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{X} = \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} x_{\nu k}\right). \tag{10,12}$$

Da nach (10,9) die Matrix (10,12) gleich $\mathfrak{E}$ sein soll, müssen die Elemente der k-Spalte von (10,12) alle verschwinden bis auf das k., das gleich 1 sein muß. Das gibt für ein festes k die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} x_{1k} + a_{12} x_{2k} + \cdots + a_{1n} x_{nk} = \delta_{1k}, \\ \vdots \\ a_{k1} x_{1k} + a_{k2} x_{2k} + \cdots + a_{kn} x_{nk} = \delta_{kk}, \\ \vdots \\ a_{n1} x_{1k} + a_{n2} x_{2k} + \cdots + a_{nn} x_{nk} = \delta_{nk}, \end{array}\right\} \tag{10,13}$$

mit $\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k \\ 1 & \text{für } i = k. \end{cases}$

Das ist bei festem k ein System von n linearen Gleichungen mit den n Unbekannten $x_{1k}, \ldots, x_{nk}$. Da $|a_{ik}| \neq 0$ ist, ist (10,13) lösbar, und zwar gilt nach der CRAMERschen Regel, wenn A_{ik} die adjungierten Unterdeterminanten von a_{ik} in der Determinante a_{ik} sind (= Unterdeterminante $\times (-1)^{i+k}$):

$$x_{ik} = \frac{\sum_{\nu=1}^{n} \delta_{\nu k} A_{\nu i}}{|\mathfrak{A}|} = \frac{A_{ki}}{|\mathfrak{A}|} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{10,14}$$

Damit ist die Matrix $\mathfrak{X}$ (10,11) bestimmt. Nach (10,14) lassen sich nun die Elemente der Matrix $\mathfrak{A}^{-1}$ berechnen. Setzt man $\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{B}$, so hat man zu beachten, daß das Element b_{ik} mit Hilfe der zum Element a_{ki} gehörigen adjungierten Unterdeterminanten gebildet wird (vgl. auch (7,1)).

Besonders einfach wird die Bildung der Reziproken im Falle einer Diagonalmatrix. Wegen $|\mathfrak{D}|_{(n,n)} = d_{11} \cdot d_{22}, \ldots \cdot d_{nn}$ wird das Element der reziproken Diagonalmatrix gleich dem reziproken Element selbst

$$d_{kk}^{-1} = \frac{1}{d_{kk}}.$$

Eine eigentliche Division ist in der Matrizenrechnung nicht definiert. Sie kann aber als Produkt mit der reziproken Matrix angesehen werden.

Da die Multiplikation nicht kommutativ ist, so kann man fragen:

1. Gibt es eine Matrix $\mathfrak{X}$, so daß $\mathfrak{A}\mathfrak{X} = \mathfrak{B}$ ist? Ist $\mathfrak{A}$ nicht singulär, dann kann man beide Seiten von links her mit $\mathfrak{A}^{-1}$ multiplizieren und erhält wegen $\mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{A} = \mathfrak{E}$:

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{B}. \tag{10,15}$$

2. Gibt es eine Matrix $\mathfrak{Y}$, so daß $\mathfrak{Y}\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ ist? Multipliziert man diese Gleichung von rechts her mit $\mathfrak{A}^{-1}$, so wird:

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}^{-1}. \tag{10,16}$$

Im allgemeinen ist $\mathfrak{X} \neq \mathfrak{Y}$.

Beispiel: Es sei

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

dann ist $\quad |\mathfrak{A}| = 4, \quad |\mathfrak{B}| = 2, \quad |\mathfrak{C}| = 6$

nach (10,14) $\quad \mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$

wegen (10,3) $\quad |\mathfrak{A}^{-1}| = |\mathfrak{A}|^{-1} = \frac{1}{4}, \quad |\mathfrak{B}^{-1}| = |\mathfrak{B}|^{-1} = \frac{1}{2}, \quad |\mathfrak{C}^{-1}| = |\mathfrak{C}|^{-1} = \frac{1}{6},$

und $\quad \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{E}_2$

$$\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \mathfrak{B}\mathfrak{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{E}_2$$

$$\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathfrak{C}\mathfrak{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{E}_2$$

in Übereinstimmung mit (10,1).

Weiterhin ist (vgl. (10,15))

$$\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 10 \\ -\frac{3}{4} & -1 \end{pmatrix}$$

und (vgl. (10,16)) $\quad \mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$

also $\quad \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1}.$

11. Die Spur einer Matrix

Definition 21: Unter der Spur Sp einer quadratischen Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})_{(n,n)}$ versteht man die Summe ihrer Diagonalelemente:

$$Sp(\mathfrak{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}. \tag{11,1}$$

Dann gilt

Satz 46: Die Spur der Summe zweier Matrizen ist gleich der Summe der Spuren der beiden Matrizen

$$Sp(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = Sp\,\mathfrak{A} + Sp\,\mathfrak{B}; \tag{11,2}$$

denn nach (3,2) ist $\quad Sp(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \sum_{i=1}^{n} (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii}.$

Satz 47: Die Spur des Produktes von zwei Matrizen ist unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren.

$$Sp(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = Sp(\mathfrak{B}\mathfrak{A}), \tag{11,3}$$

oder nach (4,9) $$Sp\,[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = 0\,; \tag{11,4}$$

denn es ist, wenn $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ wegen $(a_{ik}) \cdot (b_{ik}) = \left(\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu k}\right) = (c_{ik})$,

$$Sp\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu} b_{\nu i}\right) = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{\nu i} a_{i\nu}\right) = Sp\,(\mathfrak{B}\mathfrak{A})\,.$$

Weiterhin folgt aus (11,1), daß die Spur der Einheitsmatrix gleich der Anzahl der Eins-Elemente ist:

$$Sp\,\mathfrak{E}_n = n\,. \tag{11,5}$$

Aus (11,3) folgt, daß $$Sp\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{A}^{-1}) = Sp\,\mathfrak{B} \text{ ist.} \tag{11,6}$$

Die Spur einer rechteckigen Matrix ist nicht definiert, wohl aber die Spur eines Produktes zweier rechteckiger Matrizen, sofern die entstehende Produktmatrix quadratisch ist. Existiert sowohl $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ als auch $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$, so besteht wieder Gleichung (11,3).

Beispiel: Es sei $$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

dann ist $$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 15 & 6 & 25 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

also $$Sp\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = 15\,, \quad Sp\,(\mathfrak{B}\mathfrak{A}) = 15\,;$$

d. h. es ist (11,3) erfüllt.

12. Differentiation und Integration einer Matrix

Hängen die Elemente einer Matrix von einem Parameter ab, so kann die Ableitung nach dem Parameter folgendermaßen definiert werden:

Definition 22: Unter der Ableitung einer Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ nach x versteht man die Matrix, deren Elemente die Ableitungen der Elemente von $\mathfrak{A}$ nach x sind.

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dx} = \frac{d}{dx}\left(a_{ik}\right) = \left(\frac{d}{dx}\,a_{ik}\right). \tag{12,1}$$

Aus der Definition folgt unmittelbar für den Differentialquotienten einer Summe:

$$\frac{d}{dx}\,(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = \frac{d}{dx}\,\mathfrak{A} + \frac{d}{dx}\,\mathfrak{B}\,. \tag{12,2}$$

Der Differentialquotient eines Produktes ist gegeben durch

$$\frac{d}{dx}\,(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \mathfrak{A} \cdot \frac{d}{dx}\,\mathfrak{B} + \frac{d}{dx}\,\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}\,, \tag{12,3'}$$

dagegen $$\frac{d}{dx}\,(\mathfrak{B}\mathfrak{A}) = \mathfrak{B} \cdot \frac{d}{dx}\,\mathfrak{A} + \frac{d}{dx}\,\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{A}\,. \tag{12,3''}$$

Es ist zu beachten, daß die Reihenfolge der Faktoren wegen der Ungültigkeit des kommutativen Gesetzes innegehalten werden muß.

Es ist speziell $$\frac{d}{dx}\mathfrak{E} = 0\,, \qquad \frac{d}{dx}0 = 0\,. \tag{12,4}$$

Daher ergibt sich für den Differentialquotienten einer reziproken Matrix wegen (10,1), (12,3) und (12,4)

$$\frac{d}{dx}(\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}^{-1}\frac{d}{dx}\mathfrak{A} + \frac{d}{dx}\mathfrak{A}^{-1}\cdot\mathfrak{A} = 0$$

oder $$\frac{d}{dx}\mathfrak{A}^{-1} = -\mathfrak{A}^{-1}\cdot\frac{d}{dx}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{A}^{-1}\,. \tag{12,5}$$

Ist speziell der Parameter die Zeit t, so wird die bekannte Darstellung gewählt.

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{A} = \dot{\mathfrak{A}}\,. \tag{12,1'}$$

Beispiel 1: Es sei $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \cos t & \sin t\end{pmatrix}$ und $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix}\cos t & \cos\alpha\\ \sin t & \sin\alpha\end{pmatrix}$,

dann ist $$\dot{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}, \quad \dot{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix}-\sin t & 0\\ \cos t & 0\end{pmatrix}.$$

Nach (12,3') ist

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \cos t & \sin t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t & 0\\ \cos t & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t & \cos\alpha\\ \sin t & \sin\alpha\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\sin(\alpha - t) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \sin(\alpha - t)\end{pmatrix} = \sin(\alpha - t)\cdot\mathfrak{E}_2\,.$$

Die Differentiation des Produktes nach (12,3') läßt sich umgehen, wenn erst das Produkt $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ gebildet wird und dann $\mathfrak{C}$ nach t differenziert wird.

Also $$\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \cos t & \sin t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos t & \cos\alpha\\ \sin t & \sin\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha - t) & 1\\ 1 & \cos(\alpha - t)\end{pmatrix},$$

daher $$\frac{d\mathfrak{C}}{dt} = \begin{pmatrix}\sin(\alpha - t) & 0\\ 0 & \sin(\alpha - t)\end{pmatrix} = \sin(\alpha - t)\cdot\mathfrak{E}_2\,.$$

Analog Definition 22 ist auch die Integration definiert:

Definition 23: Unter dem Integral einer Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ versteht man die Matrix, deren Elemente durch Integration der Elemente von $\mathfrak{A}$ entstanden sind:

$$\int_a^b \mathfrak{A}\,dx = \int_a^b (a_{ik})\,dx = \left(\int_a^b a_{ik}\,dx\right). \tag{12,6}$$

Beispiel 2: Es sei $$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \cos t\\ \sin t & \sin\alpha\end{pmatrix},$$

dann ist $$\int_0^{\pi/2}\mathfrak{A}\,dt = \begin{pmatrix}\int_0^{\pi/2}\cos\alpha\,dt & \int_0^{\pi/2}\cos t\,dt\\ \int_0^{\pi/2}\sin t\,dt & \int_0^{\pi/2}\sin\alpha\,dt\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi/2\cdot\cos\alpha & 1\\ 1 & \pi/2\cdot\sin\alpha\end{pmatrix}.$$

II. Spezielle Matrizen

13. Tensoren

Die bereits besprochene Möglichkeit, den Vektor als Matrix aufzufassen, kann auch auf den Tensor ausgedehnt werden. Die allgemeine Definition eines Tensors lautet: Man versteht unter einem Tensor eine homogene Summe von unbestimmten Produkten aus beliebig vielen Faktoren, deren Anzahl Stufe des Tensors genannt wird. Wir können daher die zu einem Tensor gehörige Matrix definieren als das Koeffizientenschema einer invarianten Multilinearform n-ten Grades. Die allgemeine Form für einen Tensor n-ter Stufe im k-dimensionalen Raum wäre also

$$\mathfrak{T}_k^{(n)} = \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_n}^{k} a_{\mu_1 \ldots \mu_n} i_{\mu_1} \ldots i_{\mu_n}. \tag{13,1}$$

Die a_μ sind dabei die Maßzahlen, die i_μ Einheitsvektoren.

Es ergeben sich daraus die folgenden Spezialfälle:

a) Tensor 0. Stufe ($n = 0$). $\mathfrak{T}^{(0)}$ wird eine skalare Größe. Ihre Darstellung als Matrix haben wir bereits in (5,10) kennengelernt:

$$\mathfrak{T}^{(0)} = c = (c\,\delta_{ik}). \tag{13,2}$$

b) Tensor 1. Stufe ($n = 1$). Aus (13,1) wird

$$\mathfrak{T}_k^{(1)} = \sum_{\mu_1=1}^{k} a_{\mu_1} i_{\mu_1}. \tag{13,3}$$

Im dreidimensionalen Fall ($k = 3$) bleibt also übrig

$$\mathfrak{T}_3^{(1)} = a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3, \tag{13,4}$$

d. h. wir gewinnen die Darstellung als Matrix

$$(\mathfrak{T}_3^{(1)}) = \mathfrak{A} = (a_{ik})_{(1,3)} = (a_1\ a_2\ a_3). \tag{13,5}$$

c) Tensor 2. Stufe ($n = 2$). Aus (13,1) wird

$$\mathfrak{T}_k^{(2)} = \sum_{\mu_1, \mu_2 = 1}^{k} a_{\mu_1 \mu_2} i_{\mu_1} i_{\mu_2}, \tag{13,6}$$

d. h. wir haben das unbestimmte Produkt zweier Vektoren gewonnen. Unter Bezug auf die Zweizahl der Vektoren bezeichnet man es als dyadisches Produkt (oft auch geschrieben $(a_1; a_2)$). Dann heißt die Summe beliebig vieler dyadischer Produkte (13,6) Dyade.

Es sei bemerkt, daß $\mathfrak{T}_k^{(2)}$ keine reale Existenz besitzt, sondern nur symbolische Bedeutung hat und erst in Verbindung mit einem Ortsvektor $\mathfrak{r}$ die lineare Vektorfunktion bildet:

$$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{T}^{(2)}.$$

So betrachtet, kann $\mathfrak{T}^{(2)}$ als Operator aufgefaßt werden, der die affine Abbildung des Raumes $\mathfrak{R}$ in den Raum $\mathfrak{R}'$ vermittelt.

Bezieht man in einer Dyade alle Vektoren, die als Links- oder Rechtsfaktoren auftreten, auf dasselbe Dreibein $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ als Basis, so treten bei Ausführung der

dyadischen Multiplikation die dyadischen Produkte je zweier Grundvektoren auf. Die Dyade $\mathfrak{T}_3^{(2)}$ kann daher in folgender „Neunerform" geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_3^{(2)} = \Phi = a_{11}\,\mathfrak{i}\mathfrak{i} + a_{12}\,\mathfrak{i}\mathfrak{j} + a_{13}\,\mathfrak{i}\mathfrak{k}\\ + a_{21}\,\mathfrak{j}\mathfrak{i} + a_{22}\,\mathfrak{j}\mathfrak{j} + a_{23}\,\mathfrak{j}\mathfrak{k}\\ + a_{31}\,\mathfrak{k}\mathfrak{i} + a_{32}\,\mathfrak{k}\mathfrak{j} + a_{33}\,\mathfrak{k}\mathfrak{k}\end{aligned} \qquad (13,8)$$

Für dyadische Produkte gilt das kommutative Gesetz nicht.

Die Schreibform (13,8) ist umständlich, bei umfangreichen Rechnungen leidet die Übersichtlichkeit. Deshalb wird (13,8) als folgendes Schema geschrieben:

$\Phi =$ (13,9)

	$\mathfrak{i}$	$\mathfrak{j}$	$\mathfrak{k}$
$\mathfrak{i}$	a_{11}	a_{12}	a_{13}
$\mathfrak{j}$	a_{21}	a_{22}	a_{23}
$\mathfrak{k}$	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Am Rande links werden die in der Dyade (13,8) links stehenden Einheitsvektoren (die „Antedezenten"), am Rande oben die rechts stehenden Einheitsvektoren (die „Konsequenten") angegeben.

(13,9) kann nun als Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})_{(3,3)}$ aufgefaßt werden, wobei die Maßzahlen die Elemente der Matrix sind. Ihrem Wesen nach ist die Dyade mit der Matrix (3,3) identisch, nur in der Form sind beide verschieden.

Die Zurückführung der Dyade auf Matrizen stellt eine wesentliche Erweiterung des Matrizenkalküls und seines Anwendungsbereiches dar. Es sei noch bemerkt: Enthält ein Tensor Komponenten, die durch komplexe Größen dargestellt werden, dann nimmt er eine noch allgemeinere Form an und wird Spinor genannt (vgl. auch komplexer Vektor = Bivektor, komplexe Dyade = Bidyade, ...). Ähnliche Überlegungen gelten für Tensoren höherer Ordnung: Triaden, ...

14. Transponierte Matrizen

Definition 25: Die aus einer (m, n)-reihigen Matrix (a_{ik}) durch Vertauschen ihrer Zeilen und Spalten entstehende (n, m)-reihige Matrix (a_{ki}) heißt die transponierte (oder gestürzte) zu (a_{ik}).

Bei Verwendung der Bezeichnung $\mathfrak{A}$ für (a_{ik}) wird (a_{ki}) mit $\overline{\mathfrak{A}}$ bezeichnet:

$$\mathfrak{A} = (a_{ik}),\ \overline{\mathfrak{A}} = (a_{ki}). \qquad (14,1)$$

Beispiel 1: $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 4 & 5\end{pmatrix}$, $\overline{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 0 & 5\end{pmatrix}$,

Insbesondere ergibt sich für Diagonalmatrizen, daß wegen $i = k$ sie mit ihrer transponierten übereinstimmen:

$$\mathfrak{D} = \overline{\mathfrak{D}}. \tag{14,2}$$

Speziell ist auch

$$\mathfrak{E} = \overline{\mathfrak{E}}. \tag{14,3}$$

Satz 49: Es gelten folgende Beziehungen:

$$\overline{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{A}} + \overline{\mathfrak{B}}; \tag{14,4}$$

$$\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{B}}\,\overline{\mathfrak{A}}; \tag{14,5}$$

$$\overline{\mathfrak{A}^{-1}} = (\overline{\mathfrak{A}})^{-1}; \tag{14,6}$$

$$|\overline{\mathfrak{A}}| = |\mathfrak{A}|; \tag{14,7}$$

$$\overline{\overline{\mathfrak{A}}} = \mathfrak{A}. \tag{14,8}$$

Beweise:

1. (14,4) folgt aus (3,1): $\overline{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}} = (a_{ki} + b_{ki}) = (a_{ki}) + (b_{ki})$.

Beispiel 2: Es sei $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

dann ist $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$$\overline{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \overline{\mathfrak{A}} + \overline{\mathfrak{B}}.$$

2. Der Beweis für (14,5) ergibt sich folgendermaßen: Das Element der i-Zeile und k-Spalte von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist nach (4,3) $c_{ik} = \sum_\nu a_{i\nu} b_{\nu k}$, also steht c_{ik} in $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ in der k-Zeile und i-Spalte. Das an gleicher Stelle stehende Element aus $\overline{\mathfrak{B}}\,\overline{\mathfrak{A}}$ heißt $\sum_\nu b_{\nu k} a_{i\nu} = c_{ik}$, weil infolge der Vertauschung von Zeilen und Spalten bei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ jetzt der 1. Index die Spalte und der 2. die Zeile angibt.

Mit der Vertauschung der Zeilen und Spalten wird auch die Ordnung der Matrix umgekehrt. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ rechteckige Matrizen und läßt sich das Produkt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ bilden, so kann wegen der Anpassungsbedingung nur $\overline{\mathfrak{B}}\,\overline{\mathfrak{A}}$ gebildet werden.

Beispiel 3: Es sei $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

dann ist $\overline{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\overline{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}, \quad \overline{\mathfrak{B}}\,\overline{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

3. Multipliziert man Gleichung (14,6) links oder rechts mit $\overline{\mathfrak{A}}$, so ergibt sich für die linke Seite der Gleichung nach (14,3) und (14,5):

$$\overline{\mathfrak{A}^{-1}}\,\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1}} = \overline{\mathfrak{E}} = \mathfrak{E},$$

für die rechte Seite der Gleichung nach (10,1):

$$(\overline{\mathfrak{A}})^{-1}\,\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{E},$$

d. h. es folgt (10,5).

4. Gleichung (14,7) folgt aus Satz 14.

5. $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ bedeutet zweimalige Ausführung des Vertauschens von Zeilen und Spalten, führt also zu $\mathfrak{A}$ zurück.

Schreibt man nach (8,4) bzw. (8,5) eine quadratische Matrix als Übermatrix mit den Diagonal-Teilungszahlen g_s,

$$\mathfrak{A} = \left(\mathfrak{A}^{(r,s)}\right), \quad \mathfrak{A}^{(r,s)} = \left(\mathfrak{A}^{(r,s)}_{\varrho,\sigma}\right), \quad \begin{matrix} \varrho = 1,2,\ \dots,\ g_r \\ \sigma = 1,2,\ \dots,\ g_s \end{matrix}, \tag{14,9}$$

so sieht die transponierte Übermatrix folgendermaßen aus:

$$\overline{\mathfrak{A}} = \left(\overline{\mathfrak{A}}^{(r,s)}\right) = \left(\overline{\mathfrak{A}^{(s,r)}}\right), \quad \overline{\mathfrak{A}^{(r,s)}_{\varrho,\sigma}} = \mathfrak{A}^{(s,r)}_{\sigma,\varrho}\,. \tag{14,10}$$

15. Symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen

Definition 26: Eine Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})$, die für alle i, k gleich ihrer transponierten $\overline{\mathfrak{A}} = (a_{ki})$ ist, heißt symmetrisch:

$$\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}}. \tag{15,1}$$

Symmetrische Matrizen sind notwendig quadratisch.

Beispiel 1: $$\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Das Produkt zweier symmetrischen Matrizen ist im allgemeinen nicht symmetrisch.

Beispiel 2: Es sei $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$,

dann ist $$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 14 & 17 \\ 23 & 28 \end{pmatrix} \neq \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}};$$

dagegen gilt

Satz 50: Die Reziproke einer symmetrischen Matrix ist symmetrisch.

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}}$. Dann folgt wegen $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1}} = \overline{\mathfrak{E}} = \mathfrak{E}$:

$$\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{A}^{-1}} = \mathfrak{E};$$

vordere Multiplikation mit $\mathfrak{A}^{-1}$ ergibt

$$\mathfrak{A}^{-1}\,\mathfrak{A}\,\overline{\mathfrak{A}^{-1}} = \mathfrak{A}^{-1}\,\mathfrak{E} = \mathfrak{E}\,\mathfrak{A}^{-1},$$

d. h. $$\overline{\mathfrak{A}^{-1}} = \mathfrak{A}^{-1}. \tag{15,2}$$

Beispiel 3: Es sei
$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \overline{\mathfrak{A}},$$
dann ist
$$\overline{\mathfrak{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definition 27: Eine Matrix, für die $a_{ik} = -a_{ki}$ für $i \neq k$ ist, heißt schief.

Ist $a_{ik} = -a_{ki}$ für alle i, k, so verschwinden alle Elemente a_{ii} der Hauptdiagonale und die Matrix wird als schiefsymmetrisch bezeichnet:
$$\mathfrak{A} = -\overline{\mathfrak{A}}. \tag{15,3}$$

Beispiel 4:
$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ ist schief.}$$

Beispiel 5:
$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist schiefsymmetrisch.}$$

Auch schiefe und schiefsymmetrische Matrizen sind notwendig quadratisch.

Über die Reziproke einer schiefsymmetrischen Matrix gilt

Satz 51: Die Reziproke einer schiefsymmetrischen Matrix gerader Ordnung ist auch schiefsymmetrisch.

Beweis: Es sei $\mathfrak{A} = (a_{ik})_{(n)}$ eine schiefsymmetrische quadratische Matrix; da nach Voraussetzung $\mathfrak{A} = -\overline{\mathfrak{A}}$ ist, folgt
$$|\mathfrak{A}| = (-1)^n\,|\overline{\mathfrak{A}}|.$$
Ist n ungerade, so ist $|\mathfrak{A}| = 0$, d.h. es existiert keine Reziproke. Da $\overline{\mathfrak{A}}^{-1}\,\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{E}$, wird $-\overline{\mathfrak{A}}^{-1}\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$. Hintere Multiplikation mit $\mathfrak{A}^{-1}$ liefert
$$-\overline{\mathfrak{A}}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{E}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{E},$$
d.h. es ist
$$\overline{\mathfrak{A}}^{-1} = -\mathfrak{A}^{-1}. \tag{15,4}$$

Beispiel 6: Es sei
$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
dann ist
$$\overline{\mathfrak{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
und
$$\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad -\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Satz 52: Jede beliebige Matrix $\mathfrak{A}$ ist darstellbar als Summe einer symmetrischen $\mathfrak{S}$- und einer schiefsymmetrischen $\mathfrak{Q}$-Matrix:
$$\mathfrak{A} = \mathfrak{S} + \mathfrak{Q}. \tag{15,5}$$

Beweis: Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{S} = \overline{\mathfrak{S}}$, $\mathfrak{Q} = -\overline{\mathfrak{Q}}$. Daher wird
$$\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{S}} + \overline{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{S} - \mathfrak{Q}.$$
Also folgt
$$\mathfrak{S} = \frac{\mathfrak{A} + \overline{\mathfrak{A}}}{2}, \quad \mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{A} - \overline{\mathfrak{A}}}{2}. \tag{15,6}$$

16. Konjugiert komplexe Matrizen

Definition 28: Sind die Elemente einer Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ komplexe Zahlen, so heißt konjugiert komplexe Matrix diejenige aus $\mathfrak{A}$ entstehende Matrix, bei der jedes Element durch die konjugiert komplexe Zahl ersetzt wird. Die konjugiert komplexe Matrix sowie das Element werden mit * bezeichnet:

$$\mathfrak{A}^* = (a^*_{ik}). \tag{16,1}$$

Satz 53: Es gelten folgende Beziehungen:

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^* = \mathfrak{A}^* + \mathfrak{B}^*; \tag{16,2}$$

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^* = \mathfrak{A}^* \mathfrak{B}^*; \tag{16,3}$$

$$(\mathfrak{A}^{-1})^* = (\mathfrak{A}^*)^{-1}; \tag{16,4}$$

$$|\mathfrak{A}|^* = |\mathfrak{A}^*|; \tag{16,5}$$

$$\mathfrak{A}^{**} = \mathfrak{A}. \tag{16,6}$$

Sämtliche Gleichungen folgen aus Definition 28, da es gleichgültig ist, ob erst die Rechenoperation der Summation, Multiplikation usw. der Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und dann die Bildung der konjugiert komplexen Werte vorgenommen wird, oder erst die Bildung der konjugiert komplexen Werte und als zweiter Schritt die Operation der Summation, Multiplikation usw. durchgeführt wird.

Beispiel: Es sei

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1+3i & 3+4i \\ 2+2i & 4+i \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2+i & 4+2i \\ 1+2i & 3+4i \end{pmatrix},$$

dann ist

$$\mathfrak{A}^* = \begin{pmatrix} 1-3i & 3-4i \\ 2-2i & 4-i \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B}^* = \begin{pmatrix} 2-i & 4-2i \\ 1-2i & 3-4i \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{A}^* + \mathfrak{B}^* = \begin{pmatrix} 3-4i & 7-6i \\ 3-4i & 7-5i \end{pmatrix} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^*,$$

$$\mathfrak{A}^* \mathfrak{B}^* = \begin{pmatrix} -6-17i & -9-38i \\ 4-15i & 12-31i \end{pmatrix} = (\mathfrak{A}\mathfrak{B})^*,$$

$$(\mathfrak{A}^{-1})^* = \frac{1}{3+i}\begin{pmatrix} 4-i & -(3-4i) \\ -(2-2i) & 1-3i \end{pmatrix} = (\mathfrak{A}^*)^{-1},$$

$$|\mathfrak{A}|^* = 3+i = |\mathfrak{A}^*|.$$

17. Adjungierte Matrizen

Definition 29: Unter der zu $\mathfrak{A}$ adjungierten oder begleitenden Matrix versteht man die transponierte der konjugiert komplexen Matrix bzw. die konjugiert komplexe der transponierten Matrix; sie wird mit $\mathfrak{A}^\dagger$ bezeichnet.

Also ist

$$\mathfrak{A}^\dagger = (a_{ki}^*) = \overline{\mathfrak{A}}^*. \tag{17,1}$$

Satz 54: Es gelten folgende Beziehungen:

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^\dagger = \mathfrak{A}^\dagger + \mathfrak{B}^\dagger; \tag{17,2}$$
$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^\dagger = \mathfrak{B}^\dagger \mathfrak{A}^\dagger; \tag{17,3}$$
$$(\mathfrak{A}^{-1})^\dagger = (\mathfrak{A}^\dagger)^{-1}; \tag{17,4}$$
$$|\mathfrak{A}^\dagger| = |\mathfrak{A}|^\dagger; \tag{17,5}$$
$$\mathfrak{A}^{\dagger\dagger} = \mathfrak{A}. \tag{17,6}$$

Die Beweise ergeben sich aus den entsprechenden Gleichungen (15) und (16).

Die Beziehungen (17,2) bis (17,6) behalten auch für rechteckige Matrizen ihre Gültigkeit. Die adjungierte Matrix hat dann ebenso viele Zeilen wie die ursprüngliche Matrix Spalten hat und umgekehrt. Wenn also für eine Matrix $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^\dagger$ ist, ist sie notwendig quadratisch.

Die Reziproke der Adjungierten nennt man die zu $\mathfrak{A}$ kontragrediente Matrix und bezeichnet sie mit $\breve{\mathfrak{A}}$.

Also ist
$$\breve{\mathfrak{A}} = (\mathfrak{A}^\dagger)^{-1} = (\mathfrak{A}^{-1})^\dagger. \tag{17,4'}$$

Umgekehrt ist $\mathfrak{A}$ kontragredient zu $\breve{\mathfrak{A}}$.

Ferner folgt aus (17,3) und (10,6), daß

$$\text{mit } \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C} \text{ auch } \breve{\mathfrak{A}}\breve{\mathfrak{B}} = \breve{\mathfrak{C}} \tag{17,7}$$

ist.

Wegen (6,3) ist
$$|\mathfrak{A}^\dagger| = |\mathfrak{A}^*|. \tag{17,8}$$

Beispiel: Es sei

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1+3i & 3+4i \\ 2+2i & 4+i \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2+i & 4+2i \\ 1+2i & 3+4i \end{pmatrix},$$

dann ist
$$\mathfrak{A}^\dagger = \begin{pmatrix} 1-3i & 2-2i \\ 3-4i & 4-i \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B}^\dagger = \begin{pmatrix} 2-i & 1-2i \\ 4-2i & 3-4i \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{A}^\dagger + \mathfrak{B}^\dagger = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^\dagger = \begin{pmatrix} 3-4i & 3-4i \\ 7-6i & 7-5i \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} -6+17i & -9+38i \\ 4+15i & 12+31i \end{pmatrix},$$

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^\dagger = \mathfrak{B}^\dagger \mathfrak{A}^\dagger = \begin{pmatrix} -6-17i & 4-15i \\ -9-38i & 12-31i \end{pmatrix},$$

$$\breve{\mathfrak{A}} = \frac{1}{3+i}\begin{pmatrix} 4-i & -2+2i \\ -3+4i & 1-3i \end{pmatrix}, \quad \breve{\mathfrak{B}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3+4i & 1-2i \\ 4-2i & -2+i \end{pmatrix},$$

$$\breve{\mathfrak{A}}\breve{\mathfrak{B}} = \breve{\mathfrak{C}} = \frac{1}{3i-1}\begin{pmatrix} -12+31i & 4-15i \\ -9-30i & 6+17i \end{pmatrix},$$

$$|\mathfrak{A}^\dagger| = |\mathfrak{A}|^\dagger = 3+i \qquad |\mathfrak{B}^\dagger| = |\mathfrak{B}|^\dagger = -i.$$

Die adjungierten Übermatrizen sehen analog (14,10) folgendermaßen aus:

$$\mathfrak{A}^\dagger = (\mathfrak{A}^{\dagger(r,s)}) = (\mathfrak{A}^{(s,r)})^\dagger, \quad \mathfrak{A}^{(s,r)\dagger}_{\sigma,\varrho} = \mathfrak{A}^{(s,r)*}_{\varrho,\sigma}. \tag{17,9}$$

18. Hermitische und alternierende Matrizen

Definition 30: Eine Matrix, für die

$$\mathfrak{A}^\dagger = \mathfrak{A}, \ (a_{ik} = a^*_{ki}) \tag{18,1}$$

ist, heißt hermitisch oder „sich selbst adjungiert".

Die Diagonalelemente einer hermitischen Matrix sind reell; denn wenn die Elemente der Diagonale von $\mathfrak{A}$ die allgemeine Form $a + bi$ hätten, so hätten die entsprechenden Elemente von $\mathfrak{A}^\dagger$ die Form $a - bi$. Nach (18,1) muß daher sein:

$$a + bi = a - bi.$$

Diese Gleichung ist aber nur befriedigt für $bi = 0$.

Auch die Determinante ist reell, da das Produkt einer komplexen Zahl mit der konjugiert komplexen Zahl reell ist und auch die Diagonalelemente reell sind.

Satz 55: Für eine hermitische Matrix gilt

$$(\mathfrak{A}^\dagger)^{-1} = (\mathfrak{A}^{-1})^\dagger = \mathfrak{A}^{-1}, \tag{18,2}$$

falls $|\mathfrak{A}| \neq 0$.

Satz 56: Die Summe zweier hermitischer Matrizen ist hermitisch,

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^\dagger = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} \quad \text{für} \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^\dagger, \ \mathfrak{B} = \mathfrak{B}^\dagger. \tag{18,3}$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus (17,2).

Satz 57: Das Produkt zweier hermitischer Matrizen ist nur hermitisch, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ vertauschbar sind:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^\dagger = \mathfrak{A}\mathfrak{B} \text{ für } \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^\dagger, \ \mathfrak{B} = \mathfrak{B}^\dagger; \ [\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = 0. \tag{18,4}$$

Der Beweis folgt aus (17,3).

Satz 58: Jede Matrix $\mathfrak{A}$ läßt sich auf eine und nur eine Weise in der Form

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + i\,\mathfrak{A}_2 \tag{18,5}$$

mit hermitischen Matrizen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ durch die Gleichung darstellen:

$$\mathfrak{A}_1 = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^\dagger), \quad \mathfrak{A}_2 = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}^\dagger). \tag{18,6}$$

Gleichung (18,6) ergibt sich wegen $\mathfrak{A}^\dagger = (\mathfrak{A}_1 + i\,\mathfrak{A}_2)^\dagger = \mathfrak{A}_1 - i\,\mathfrak{A}_2$.

Beispiel 1: Es sei

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1+2i \\ 1-2i & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 4 & 2-4i \\ 2-4i & 2 \end{pmatrix},$$

dann ist

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^\dagger, \ \mathfrak{B} = \mathfrak{B}^\dagger, \ |\mathfrak{A}^\dagger| = 1, \ |\mathfrak{B}^\dagger| = -12,$$

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B})^\dagger = \begin{pmatrix} 7 & 3+6i \\ 3-6i & 4 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}\mathfrak{B})^\dagger = \begin{pmatrix} 22 & 8+16i \\ 8-16i & 14 \end{pmatrix}.$$

Definition 31: Eine Matrix, für die

$$\mathfrak{A}^\dagger = -\mathfrak{A} \tag{18,7}$$

ist, heißt alternierend.

Die Diagonalelemente einer alternierenden Matrix sind rein imaginär; denn wenn die Elemente der Diagonale von $\mathfrak{A}$ die allgemeine Form $a+bi$ hätten, so hätten die entsprechenden Elemente von $\mathfrak{A}^\dagger$ die Form $a-bi$. Wegen (18,7) muß also sein:

$$a+bi = -(a-bi),$$

was nur mit $a = 0$ verträglich ist.

Die Determinante einer alternierenden Matrix ist bei gerader Ordnung reell, bei ungerader rein imaginär.

Beispiel 2: Es sei

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} i & 1+2i \\ -(1-2i) & 2i \end{pmatrix},$$

dann ist

$$\mathfrak{A} = -\mathfrak{A}^\dagger, \; |\mathfrak{A}^\dagger| = 3.$$

Satz 59: Jede Matrix $\mathfrak{A}$ läßt sich auf eine und nur eine Weise in der Form

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 \tag{18,8}$$

mit $\mathfrak{A}_1$ als hermitischer und $\mathfrak{A}_2$ als alternierender Matrix durch die Gleichung darstellen:

$$\mathfrak{A}_1 = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^\dagger), \quad \mathfrak{A}_2 = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A} - \mathfrak{A}^\dagger). \tag{18,9}$$

Der Beweis ergibt sich analog Satz 52.

Wegen (18,6) und (18,9) ist eine alternierende Matrix das i-fache einer hermitischen Matrix.

Ist $\mathfrak{A}$ hermitisch, so folgt für die Untermatrizen

$$\mathfrak{A}^{(r,s)} = \mathfrak{A}^{(s,r)\dagger}. \tag{18,10}$$

Insbesondere sind die Diagonal-Untermatrizen selbst hermitisch:

$$\mathfrak{A}^{(r,r)} = \mathfrak{A}^{(r,r)\dagger}. \tag{18,11}$$

19. Unitäre Matrizen

Definition 32: Eine Matrix, die mit ihrer kontragredienten identisch ist, heißt unitär (auch hermitisch orthogonal):

$$\mathfrak{U} = \check{\mathfrak{U}}. \tag{19,1}$$

(19,1) ist äquivalent mit

$$\mathfrak{U}^\dagger = \mathfrak{U}^{-1}$$

und

$$\mathfrak{U}\mathfrak{U}^\dagger = \mathfrak{U}^\dagger\mathfrak{U} = \mathfrak{E}. \tag{19,3}$$

Satz 60: Ist $\mathfrak{U}$ unitär, so ist auch

$$\mathfrak{U}^{-1}, \quad \overline{\mathfrak{U}}, \quad \mathfrak{U}^*, \quad \mathfrak{U}^\dagger$$

unitär, d. h. es ist

$$\breve{\mathfrak{U}}^{-1} = \mathfrak{U}^{-1}, \quad \breve{\overline{\mathfrak{U}}} = \overline{\mathfrak{U}}, \quad \breve{\mathfrak{U}}^* = \mathfrak{U}^*, \quad \breve{\mathfrak{U}}^\dagger = \mathfrak{U}^\dagger \tag{19,4}$$

als Folge von (19,1).

Satz 61: Sind $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ unitär, so ist auch $\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2$ und $\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1$ unitär:

$$(\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2)^\dagger = (\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2)^{-1}, \qquad (\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1)^\dagger = (\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1)^{-1}. \tag{19,5}$$

Beweis: Wegen (19,2), (17,3) und (10,6) ist

$$(\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2)^\dagger = \mathfrak{U}_2^\dagger\mathfrak{U}_1^\dagger = \mathfrak{U}_2^{-1}\mathfrak{U}_1^{-1} = (\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2)^{-1}.$$

Satz 62: Die Determinante einer unitären Matrix ist ± 1:

$$|\mathfrak{U}| = \pm 1. \tag{19,6}$$

Beweis: Nach (17,8) ist $\qquad |\mathfrak{U}^\dagger| = |\mathfrak{U}^*| = |\mathfrak{U}|^*.$

Daher wird wegen (6,17) und (19,3)

$$|\mathfrak{U}|^2 = |\mathfrak{U}|\,|\mathfrak{U}|^* = |\mathfrak{U}|\cdot|\mathfrak{U}^\dagger| = |\mathfrak{U}\mathfrak{U}^\dagger| = |\mathfrak{E}| = 1.$$

Satz 63: Ist $\mathfrak{A}$ eine beliebige und $\mathfrak{U}$ eine unitäre Matrix, so folgt aus

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{U} \quad \text{auch} \quad \mathfrak{B}^\dagger = \mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{A}^\dagger\mathfrak{U}. \tag{19,7}$$

Beweis: Wegen (19,1), (19,2) und (17,3) ist

$$\mathfrak{B}^\dagger = (\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{U})^\dagger = (\mathfrak{A}\mathfrak{U})^\dagger(\mathfrak{U}^{-1})^\dagger = (\mathfrak{A}\mathfrak{U})^\dagger\cdot\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^\dagger\mathfrak{A}^\dagger\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{A}^\dagger\mathfrak{U}.$$

Satz 64: Ist $\mathfrak{A}$ hermitisch und $\mathfrak{U}$ unitär, so ist auch

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{U} \tag{19,8}$$

hermitisch.

Der Satz ist eine Folge von Satz 63.

Eine Umkehrung des Satzes lautet:

Satz 65: Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ hermitisch und gilt

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{U},$$

so ist $\mathfrak{U}\mathfrak{U}^\dagger$ mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{U}^\dagger\mathfrak{U}$ mit $\mathfrak{B}$ vertauschbar.

Beweis: Nach Voraussetzung ist

$$\mathfrak{B}^\dagger = \mathfrak{U}^\dagger\mathfrak{A}(\mathfrak{U}^{-1})^\dagger = \mathfrak{B} = \mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{U};$$

vordere Multiplikation mit $\mathfrak{U}$ und hintere mit $\mathfrak{U}^\dagger$ ergibt

$$\mathfrak{U}\mathfrak{U}^\dagger\mathfrak{A}(\mathfrak{U}^{-1})^\dagger\mathfrak{U}^\dagger = \mathfrak{U}\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{U}\mathfrak{U}^\dagger,$$

d. h.

$$\mathfrak{U}\mathfrak{U}^\dagger\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{U}\mathfrak{U}^\dagger. \tag{19,9a}$$

Daraus ergibt sich unmittelbar

$$\mathfrak{U}^{\dagger}\mathfrak{U}\mathfrak{V} = \mathfrak{V}\mathfrak{U}^{\dagger}\mathfrak{U}. \tag{19,9b}$$

Beispiel 1: Die Matrix $\mathfrak{U}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}i \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}i & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

ist unitär; denn es ist

$$|\mathfrak{U}_1| = 1, \qquad \mathfrak{U}_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}i \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}i & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \mathfrak{U}_1^{\dagger}.$$

Weiterhin ist die Matrix $\mathfrak{U}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}}i \\ -\sqrt{\frac{2}{3}}i & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

wegen $|\mathfrak{U}_2| = 1$ und $\mathfrak{U}_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}}i \\ -\sqrt{\frac{2}{3}}i & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ unitär.

Entsprechend Satz 61 ist

$$(\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2)^{\dagger} = (\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}} & -\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)i \\ -\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\right)i & \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

mit $|\mathfrak{U}_1\mathfrak{U}_2| = 1$

und

$$(\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1)^{\dagger} = (\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} & -\left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)i \\ -\left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)i & \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

mit $|\mathfrak{U}_2\mathfrak{U}_1| = 1$.

Beispiele für die Sätze 63 bis 65 lassen sich mit den aufgeführten unitären Matrizen leicht bilden.

Entsprechend (5,16) sind unitäre Diagonalmatrizen Phasenmatrizen.

Vertauscht man in einer Einheitsmatrix die Spalten oder Zeilen, so entsteht die Permutationsmatrix $\mathfrak{P}_{ik}$; die Indizes sollen dabei bedeuten, daß die i-te mit der k-ten Zeile (bzw. Spalte) einer Permutation unterworfen worden ist. Die Permutationsmatrix ist eine unitäre Matrix; denn für sie gilt:

$$\mathfrak{P}_{ik} = \overline{\mathfrak{P}}_{ik} = \mathfrak{P}_{ik}^{\dagger} = \mathfrak{P}_{ik}^{-1} = \breve{\mathfrak{P}}_{ik} \tag{19,10}$$

mit

$$|\mathfrak{P}_{ik}| = -1. \tag{19,11}$$

Beispiel 2: Es sei
$$\mathfrak{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

dann ist
$$\mathfrak{V}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \overline{\mathfrak{V}}_{12} = \mathfrak{V}_{12}^{\dagger} = \mathfrak{V}_{12}^{-1} = \breve{\mathfrak{V}}_{12},$$
$$|\mathfrak{V}_{12}| = -1.$$

Für eine unitäre Übermatrix $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^{(r,s)}$ hat man
$$\sum_{\nu} \mathfrak{U}^{(r,\nu)} \mathfrak{U}^{(s,\nu)\dagger} = \sum_{\nu} \mathfrak{U}^{(\nu,r)\dagger} \mathfrak{U}^{(\nu,s)} = \delta_{rs} \mathfrak{E}^{(r)}, \tag{19,12}$$

wobei $\mathfrak{E}^{(r)}$ die g_r dimensionale Einheitsmatrix ist.
Liegt insbesondere eine unitäre Stufenmatrix
$$\mathfrak{U} = (\mathfrak{U}^{(r)} \delta_{rs}) \tag{19,13}$$
vor, so folgt aus (19,12)
$$\mathfrak{U}^{(r)} \mathfrak{U}^{(r)\dagger} = \mathfrak{U}^{(r)\dagger} \mathfrak{U}^{(r)} = \mathfrak{E}^{(r)}, \tag{19,14}$$

d. h. die Diagonal-Untermatrizen sind selbst unitär.

20. Orthogonale Matrizen

Definition 33: Eine quadratische Matrix $\mathfrak{O}$ heißt orthogonal, wenn
$$\overline{\mathfrak{O}} = \mathfrak{O}^{-1} \tag{20,1}$$
oder
$$\mathfrak{O}\overline{\mathfrak{O}} = \mathfrak{E} \tag{20,2}$$
ist.

Betrachtet man die Elemente o_{ik}, so ergeben sich die Orthogonalitätsbedingungen für die Elemente
$$\sum_{\varrho} o_{i\varrho}\, o_{\varrho k} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}. \tag{20,3}$$

Aus (20,2) folgt, daß auch $\overline{\mathfrak{O}}$ orthogonal ist. Jede reelle unitäre Matrix ist orthogonal. Die Regeln für unitäre Matrizen können auf orthogonale Matrizen übertragen werden.

Ist $\mathfrak{O}_1$ und $\mathfrak{O}_2$ orthogonal, so ist es auch das Produkt; denn es ist
$$(\mathfrak{O}_1 \mathfrak{O}_2)\,\overline{(\mathfrak{O}_1 \mathfrak{O}_2)} = \mathfrak{O}_1 \mathfrak{O}_2 \overline{\mathfrak{O}}_2 \overline{\mathfrak{O}}_1 = \mathfrak{O}_1 \overline{\mathfrak{O}}_1 = \mathfrak{E}\,. \tag{20,4}$$

Aus (20,2) folgt weiterhin für die Determinante
$$|\mathfrak{O}|\,|\overline{\mathfrak{O}}| = |\mathfrak{E}| = |\mathfrak{O}|^2 = 1$$
d. h.
$$|\mathfrak{O}| = 1\,. \tag{20,5}$$

Beispiel: $\mathfrak{O}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist orthogonal, da $\overline{\mathfrak{O}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{O}_1^{-1}$ ist.

Dann ist $$|\mathfrak{O}_1| = 1,$$

$$\mathfrak{O}_1 \mathfrak{O}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathfrak{E}, \tag{20,6}$$

$$\mathfrak{E}\mathfrak{O}_1 = \mathfrak{O}_1 \mathfrak{E} = \mathfrak{O}_1 . \tag{20,7}$$

Das bedeutet aber, daß die Algebra der Matrizen $a\mathfrak{E} + b\mathfrak{O}_1$, wobei a und b Skalare sind, identisch ist mit der der skalaren $a + bi$.

21. Einzelmatrizen

Eine besondere Klasse von hermitischen Matrizen stellen die Einzelmatrizen dar. Sie sind folgendermaßen definiert:

Definition 34: Eine Matrix $\mathfrak{J}$ heißt Einzelmatrix, wenn

$$\mathfrak{J}^\dagger = \mathfrak{J}, \quad \mathfrak{J}^2 - \mathfrak{J} = \mathfrak{J}(\mathfrak{E} - \mathfrak{J}) = 0 \tag{21,1}$$

ist.

Eine Einzelmatrix stimmt also mit ihrem Quadrat überein. Spezielle Fälle sind die Nullmatrix und die Einheitsmatrix.

Zur allgemeinen Matrix $\mathfrak{J}$ gelangt man dadurch, daß man in der Diagonale der Einheitsmatrix einige 1 durch 0 ersetzt. Die Determinante einer derartigen Matrix wird dann verschwinden, so daß solche Matrizen keine Reziproke besitzen.

Es gelten nun folgende Sätze über Einzelmatrizen:

Satz 66: Besitzt eine Einzelmatrix $\mathfrak{J}_1$ eine Reziproke, so ist sie eine Einheitsmatrix.

Denn wenn es zu $\mathfrak{J}_1$ eine Matrix $\mathfrak{A}$ gibt, so daß

$$\mathfrak{J}_1 \mathfrak{A} = \mathfrak{E}$$

ist, so folgt $$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_1 \mathfrak{E} = \mathfrak{J}_1^2 \mathfrak{A} = \mathfrak{J}_1 \mathfrak{A} = \mathfrak{E}. \tag{21,2}$$

Satz 67: Ist $\mathfrak{J}$ eine Einzelmatrix, so ist es auch $\mathfrak{E} - \mathfrak{J}$ und umgekehrt.

Beweis: Es ist

$$(\mathfrak{E} - \mathfrak{J})^2 = \mathfrak{E} - 2\mathfrak{J} + \mathfrak{J}^2 = \mathfrak{E} - 2\mathfrak{J} + \mathfrak{J} = \mathfrak{E} - \mathfrak{J}. \tag{21,3}$$

Satz 68: Das Produkt zweier Einzelmatrizen $\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2$ ist dann und nur dann wieder eine Einzelmatrix, wenn $\mathfrak{J}_1, \mathfrak{J}_2$ vertauschbar sind.

Beweis: Wegen (18,4) ist die Vertauschbarkeit hinreichend und notwendig dafür, daß $\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2$ hermitisch ist.

Sodann ist

$$(\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2)^2 = \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_1^2 \mathfrak{J}_2^2 = \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 . \tag{21,4}$$

Satz 69: Die Summe $\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2$ ist dann und nur dann eine Einzelmatrix, wenn $\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 = 0$ (bzw. $\mathfrak{J}_2 \mathfrak{J}_1 = 0$) ist.

Beweis: Wegen Satz 68 ist $\mathfrak{J}_2 \mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 = 0$.

Sodann ist wegen $\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 = 0$ auch $(\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2)^2 = 0$.

Daher folgt

$$(\mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2)^2 = \mathfrak{J}_1^2 + \mathfrak{J}_2^2 + \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 + \mathfrak{J}_2 \mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 . \tag{21,5}$$

Satz 70: Die Differenz $\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2$ ist dann und nur dann wieder eine Einzelmatrix, wenn $\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_2$ (oder nach Satz 68 $\mathfrak{F}_2 \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2$) ist.

Beweis: Nach Satz 67 ist $\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2$ dann und nur dann eine Einzelmatrix, wenn $\mathfrak{E} - (\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2) = (\mathfrak{E} - \mathfrak{F}_1) + \mathfrak{F}_2$ eine Einzelmatrix ist. Daher ist nach Satz 69 notwendig und hinreichend, daß

$$(\mathfrak{E} - \mathfrak{F}_1)\,\mathfrak{F}_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_2$$

ist.

Beispiel:
$$\mathfrak{F}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sind Einzelmatrizen; denn es ist

$$1.\ \mathfrak{F}_1^{\dagger} = \mathfrak{F}_1, \ \mathfrak{F}_2^{\dagger} = \mathfrak{F}_2,$$
$$2.\ \mathfrak{F}_1^{2} = \mathfrak{F}_1, \ \mathfrak{F}_2^{2} = \mathfrak{F}_2.$$

Dann ist
$$(\mathfrak{E} - \mathfrak{F}_1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{E} - \mathfrak{F}_1 \text{ (vgl. Satz 67)},$$

$$(\mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_2 \mathfrak{F}_1 \text{ (vgl. Satz 68)}.$$

Dagegen ist

$$(\mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2)^2 \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2, \text{ da } \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \neq 0 \text{ (vgl. Satz 69)}$$

und
$$(\mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2)^2 \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{F}_1 - \mathfrak{F}_2, \text{ da } \mathfrak{F}_1 \mathfrak{F}_2 \neq \mathfrak{F}_2 \text{ (vgl. Satz 70)}.$$

III. Funktionen von Matrizen

22. Potenzen von Matrizen

Definition 35: Ist p eine Zahl und $\mathfrak{A}$ eine quadratische Matrix, so bestehen folgende Beziehungen:

$$\mathfrak{A}^p = \mathfrak{A}\,\mathfrak{A}^{p-1}, \tag{22,1}$$
$$\mathfrak{A}^{-p} = (\mathfrak{A}^{-1})^p \tag{22,2}$$

und
$$\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{E}. \tag{22,3}$$

Auf Grund dieser analog den gewöhnlichen Zahlen gebildeten Potenzreihen gelten dann folgende Potenzgesetze:

$$\mathfrak{A}^p\,\mathfrak{A}^q = \mathfrak{A}^{p+q} \tag{22,4}$$

und
$$(\mathfrak{A}^p)^q = \mathfrak{A}^{p\cdot q} \tag{22,5}$$

und zwar bei ganzzahligen p und q für nicht singuläre, bei positiven p und q auch für beliebige Matrizen.

Die Potenzen $\mathfrak{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{A}\mathfrak{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^3, \ldots$ heißen auch iterierte Matrizen. In Erweiterung der Differentiationsregeln aus Ziffer 12 besteht die Beziehung:

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{A}^3 = \frac{d\mathfrak{A}}{dt}\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^2\frac{d\mathfrak{A}}{dt} \tag{22,6}$$

und entsprechend für höhere Potenzen von $\mathfrak{A}$.

Beispiel: Es sei $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

dann ist

$$\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 20 \\ 5 & 13 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{A}^3 = \mathfrak{A}^2\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 8 & 20 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 & 92 \\ 23 & 59 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 3/2 & -2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{A}^{-2} = (\mathfrak{A}^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 13/4 & -5 \\ -5/4 & 2 \end{pmatrix}.$$

23. Funktionen von Matrizen (Allgemeines)

Definition 36: Ist $f(\mathfrak{A})$ eine Funktion der Matrix $\mathfrak{A}$ n-ter Ordnung und sind α_i Skalare ($i = 0, \ldots, h$), so heißt

$$f(\mathfrak{A}) = \alpha_0\mathfrak{E} + \alpha_1\mathfrak{A} + \cdots + \alpha_{h-1}\mathfrak{A}^{h-1} + \alpha_h\mathfrak{A}^h = \sum_{\nu=0}^{h} \alpha_\nu \mathfrak{A}^\nu \tag{23,1}$$

ein Polynom von $\mathfrak{A}$.

In Erweiterung von (23,1) lassen sich Polynome definieren, die Funktionen von mehreren Matrizen $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_f$, die man sich als variabel vorstellt, darstellen. Da die Matrizen $\mathfrak{A}_f$ i. a. nicht kommutativ sind, wird zweckmäßigerweise folgende Form gewählt:

$$f(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_f) = \sum_{\varrho} \sum_{\nu_1 \ldots \nu_\varrho} \alpha^{(\varrho)}_{\nu_1 \ldots \nu_\varrho} \mathfrak{A}_{\nu_1} \ldots \mathfrak{A}_{\nu_\varrho}, \tag{23,2}$$

wobei $\nu_1 \ldots \nu_\varrho$ irgend eine Anordnung der Zahlen $1, 2, \ldots, f$ mit Wiederholungen bildet und ϱ den Grad des betreffenden Gliedes kennzeichnet.

Das adjungierte Polynom wird dann in folgender Weise definiert:

Definition 37: $$f^\dagger(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_f) = \sum_{\varrho} \sum_{\nu_1 \ldots \nu_\varrho} \alpha^{(\varrho)*}_{\nu_1 \ldots \nu_\varrho} \mathfrak{A}_{\nu_1} \ldots \mathfrak{A}_{\nu_\varrho}, \tag{23,3}$$

d. h. es gilt die Regel: In allen Gliedern von (23,2) kehre man die Reihenfolge der Matrizenfaktoren um und ersetze die Zahlenkoeffizienten durch ihre konjugierten

Werte. Setzt man in $f^\dagger(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_f)$ die adjungierten Argumentmatrizen $\mathfrak{A}^\dagger_1, \ldots, \mathfrak{A}_f^\dagger$ ein, so erkennt man, daß das Polynom (23,3) die Eigenschaft hat, die zur Matrix $f(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_f)$ adjungierte Matrix darzustellen:

$$f^\dagger(\mathfrak{A}_1^\dagger, \ldots, \mathfrak{A}^\dagger_f) = (f^\dagger(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_f))^\dagger. \tag{23,4}$$

Ist identisch in den $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_f$

$$f^\dagger(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_f) = f(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_f), \tag{23,5}$$

so heißt das Polynom hermitisch; denn es ist für die hermitischen Argumentmatrizen $\mathfrak{A}^\dagger_1 = \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}^\dagger_f = \mathfrak{A}_f$:

$$\begin{aligned}(f(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_f))^\dagger &= f^\dagger(\mathfrak{A}^\dagger_1, \ldots, \mathfrak{A}^\dagger_f)\\ &= f^\dagger(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_f)\\ &= f(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_f).\end{aligned}$$

Zu noch allgemeineren Matrizenfunktionen gelangt man durch Grenzübergang zu konvergierenden unendlichen Potenzreihen:

$$\mathfrak{B} = f(\mathfrak{A}) = \lim_{h\to\infty} \sum_{\nu=0}^{h} \alpha_\nu \mathfrak{A}^\nu. \tag{23,6}$$

Es gilt folgender Satz:

Satz 71: Ersetzt man in einer Matrizenfunktion $f(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_f)$ die Argumente durch

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}, \ldots, \mathfrak{B}_f = \mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{A}_f\mathfrak{C}, \tag{23,7}$$

wobei $\mathfrak{C}$ eine beliebige Matrix ist, so geht die Funktion über in

$$f(\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_f) = \mathfrak{C}^{-1} f(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_f)\,\mathfrak{C}. \tag{23,8}$$

Die Richtigkeit des Satzes erkennt man z. B. in den Fällen, daß f eine Summe $\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$ oder ein Produkt $\mathfrak{A}_1 \cdot \mathfrak{A}_2$ ist; dann ist nämlich

$$\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{A}_1\mathfrak{C} + \mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{A}_2\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{-1}(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2)\,\mathfrak{C}$$

und

$$\mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{A}_1\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{A}_2\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}.$$

Auch auf beliebige Funktionen können die Begriffe der adjungierten und hermitischen Funktionen übertragen werden. Sich selbst adjungiert sind z. B. folgende durch eine Potenzreihe mit reellen Koeffizienten definierte Matrizenfunktionen mit vertauschbaren Argumenten

$$f(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_f) = \sum_{\nu_1 \ldots \nu_f} \alpha_{\nu_1 \ldots \nu_f} \mathfrak{A}_1^{\nu_1} \ldots \mathfrak{A}_f^{\nu_f}. \tag{23,9}$$

Speziell ist jede Funktion eines Argumentes mit reellen Koeffizienten

$$f(\mathfrak{A}) = \sum_{\nu=0}^{h} \alpha_\nu \mathfrak{A}^\nu$$

sich selbst adjungiert, wie z. B. die Exponentialfunktion

$$e^{\mathfrak{A}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{A}^\nu}{\nu!}, \tag{23,10}$$

d. h. man kann gelegentlich auch die Definition einer Matrix als Funktion $f(\mathfrak{A})$ der n-reihigen quadratischen Matrizen $\mathfrak{A}$ auf Fälle ausdehnen, wo eine Darstellung durch ein Polynom nicht mehr möglich ist. Eine solche Reihe ist dabei so zu verstehen, daß man erst nur die Summe der ersten N-Glieder zu nehmen hat und dann zu untersuchen hat, ob jedes der n^2 Elemente der so entstehenden Matrix bei wachsendem N konvergiert; die aus den n^2 Grenzwerten gebildete Matrix gilt in diesem Fall als Wert der Reihe.

Die Matrix (23,10) konvergiert stets (s. unten Beispiel 2).

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ vertauschbare Matrizen, so gilt wie bei Zahlen

$$e^{\mathfrak{A}} \cdot e^{\mathfrak{B}} = e^{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}. \tag{23,11}$$

Da $e^0 = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{A}$ und $-\mathfrak{A}$ vertauschbar sind, so folgt aus (23,10), daß $e^{-\mathfrak{A}}$ die Reziproke zu $e^{\mathfrak{A}}$ ist.

Ist $\mathfrak{A}$ eine hermitische Matrix, so ist es auch $e^{\mathfrak{A}}$. Dagegen ist $e^{i\mathfrak{A}}$ unitär; denn wegen $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^\dagger$ ist

$$(e^{i\mathfrak{A}})^\dagger = e^{-i\mathfrak{A}^\dagger} = e^{-i\mathfrak{A}}.$$

Zu einer besonders wichtigen Relation zwischen Matrizen gelangt man, wenn man für die Funktion $f(\mathfrak{A})$ eine geometrische Reihe wählt:

$$\mathfrak{S}_m = \mathfrak{E} + \mathfrak{A} + \mathfrak{A}^2 \cdots + \mathfrak{A}^m. \tag{23,12}$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $\mathfrak{A}$, so erhält man

$$\mathfrak{S}_m \mathfrak{A} + \mathfrak{E} = \mathfrak{S}_m + \mathfrak{A}^{m+1},$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{S}_m (\mathfrak{E} - \mathfrak{A}) = \mathfrak{E} - \mathfrak{A}^{m+1}.$$

Wenn nun bei wachsendem m die Matrix $\mathfrak{S}_m$ einem bestimmten Limes $\mathfrak{S}$ zustrebt, $\mathfrak{A}^{m+1}$ mithin gegen 0 strebt, so erhält man für diese durch die unendliche geometrische Reihe

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{E} + \mathfrak{A} + \mathfrak{A}^2 + \cdots = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathfrak{A}^\nu$$

definierte Matrix $\mathfrak{S}$ die Relation

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{E} - \mathfrak{A}) = \mathfrak{E}$$

oder

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{E}(\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1} = (\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}. \tag{23,13}$$

(23,13) entspricht der bekannten Formel, daß eine Potenzreihe $1 + x + x^2 + \cdots$ durch $\frac{1}{1-x}$ gegeben ist.

Ob eine Reihe vom Typ (23,1) konvergiert, kann folgendermaßen abgeschätzt werden. Die Matrix $\mathfrak{A}$ habe die Ordnung n, das größte in $\mathfrak{A}$ dem Betrage nach auftretende Element werde mit $(a_{ik})_{max} = A$ bezeichnet; entsprechend die in $\mathfrak{A}^2$, $\mathfrak{A}^3, \ldots$ auftretenden größten Elemente mit $A^{(2)}, A^{(3)}, \ldots$ Dann ist

$$A^{(2)} \leq nA^2;\; A^{(3)} \leq n^2A^3, \ldots$$

Daher existiert eine Reihe

$$g = \alpha_0 + \alpha_1 A + \alpha_2 nA^2 + \cdots = \frac{n-1}{n}\alpha_0 + \frac{1}{n}(\alpha_0 + \alpha_1 nA + \alpha_2 n^2A^2 + \cdots), \tag{23,14}$$

wobei g nur die Koeffizienten der ursprünglichen Reihe $f(\mathfrak{A})$ und das größte Element von $\mathfrak{A}$ enthält, konvergiert aber g, so konvergiert auch $f(\mathfrak{A})$.

Beispiel 1: Es sei gegeben $f(\mathfrak{A}) = \mathfrak{E} + \mathfrak{A} + \mathfrak{A}^2 + \cdots$

$$\text{mit} \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0{,}05 & -0{,}01 \\ -0{,}25 & 0{,}05 \end{pmatrix}.$$

Wegen $n = 2$, $A = 0{,}25$ wird

$$2g = 1 + 1 + 0{,}5 + (0{,}5)^2 + \cdots = 1 + (1 - 0{,}5)^{-1} = 3,$$

d. h. kein Element von $f(\mathfrak{A})$ kann 1,5 überschreiten.

Es ist nach (23,13)

$$f(\mathfrak{A}) = (\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}01 \\ 0{,}25 & 0{,}95 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{0{,}9} \begin{pmatrix} 0{,}95 & -0{,}01 \\ -0{,}25 & 0{,}95 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2: Es sei gegeben $f(\mathfrak{A}) = e^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{A}}{1!} + \frac{\mathfrak{A}^2}{2!} + \cdots$

Nach (23,14) wird $g = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} e^{nA}$, d. h. $f(\mathfrak{A})$ konvergiert für jede Matrix $\mathfrak{A}$, deren Elemente a_{ik} zwischen $-\infty$ und $+\infty$ liegen.

Die Berechnung von $e^{\mathfrak{A}}$ für eine bestimmte Matrix $\mathfrak{A}$ wird unten nach Entwicklung weiterer Matrizeneigenschaften durchgeführt werden.

24. Differentialoperationen

1. Die Taylorentwicklung für Matrizen.

Es seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei vertauschbare Matrizen. Dann gilt die gleiche Formel wie in der skalaren Algebra für die Entwicklung eines Polynoms:

$$f(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = f(\mathfrak{A}) + \mathfrak{B} f(\mathfrak{A})^{(1)} + \frac{\mathfrak{B}^2}{2!} f(\mathfrak{A})^{(2)} + \cdots + \frac{\mathfrak{B}^m}{m!} f(\mathfrak{A})^{(m)}, \qquad (24{,}1)$$

wobei $f(\mathfrak{A})^{(i)}$ die i-te Ableitung bedeutet.

Ist speziell h ein Skalar, so ist

$$f(\mathfrak{A} + h\mathfrak{E}) = f(\mathfrak{A}) + h f(\mathfrak{A})^{(1)} + \frac{h^2}{2!} f(\mathfrak{A})^{(2)} + \cdots + \frac{h^m}{m!} f(\mathfrak{A})^{(m)}. \qquad (24{,}2)$$

2. Matrizen von Differentialoperatoren.

Liegt z. B. ein Paar zweier gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit vorgegebenen Koeffizienten v_{ik}, u_{ik} vor:

$$\left.\begin{aligned} v_{11}\frac{dy_1}{dt} + u_{11} y_1 + v_{12}\frac{dy_2}{dt} + u_{12} y_2 = z_1 \\ v_{21}\frac{dy_1}{dt} + u_{21} y_1 + v_{22}\frac{dy_2}{dt} + u_{22} y_2 = z_2 \end{aligned}\right\}, \qquad (24{,}3)$$

wobei z_1, z_2 Funktionen von t sind, so lassen sich diese beiden Gleichungen folgendermaßen als Matrix schreiben:

$$\begin{pmatrix} v_{11}\frac{d}{dt}+u_{11} & v_{12}\frac{d}{dt}+u_{12} \\ v_{21}\frac{d}{dt}+u_{21} & v_{22}\frac{d}{dt}+u_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \tag{24,4}$$

wie durch Ausmultiplizieren leicht nachgerechnet werden kann. Die in (24,4) links stehende Matrix kann durch $f\left(\frac{d}{dt}\right)$ abgekürzt werden, so daß

$$f\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

wird oder

$$f\left(\frac{d}{dt}\right) \cdot \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z}. \tag{24,5}$$

Wenn Differentialgleichungen höherer Ordnung vorliegen, dann stellen die Elemente von $f\left(\frac{d}{dt}\right)$ Polynome des Operators $\frac{d}{dt}$ dar.

Partielle Differentialgleichungen können in folgender Weise dargestellt werden:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}\right). \tag{24,6}$$

Es sei bemerkt, daß der Index i stets eine Kolonnen-, der Index k stets eine Reihenmatrix angeben soll.

3. Wechsel unabhängiger Variabler.

Soll von n unabhängigen Variabeln x zu den Variabeln y übergegangen werden, so liefert die Differentialrechnung die Formel

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_k} \qquad (i = 1, \cdots, n). \tag{24,7}$$

(24,7) kann in Matrizenform folgendermaßen geschrieben werden:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \overline{\mathfrak{A}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right). \tag{24,8}$$

Dabei ist $\overline{\mathfrak{A}}$ die transponierte von

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \tag{24,9}$$

Entsprechend ist $$\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = \overline{\mathfrak{B}}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right). \tag{24,10}$$

Dabei ist $\mathfrak{B}$ diejenige Matrix, für die in (24,9) x und y vertauscht werden.

Aus (24,8) und (24,10) folgt
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathfrak{B}}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right),$$

so daß $\overline{\mathfrak{A}}\cdot\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{E}$ und damit $\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{E} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $|\mathfrak{A}|\cdot|\mathfrak{B}| = 1$ wird.

Außerdem folgt, daß die Adjunkten A und B von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Eigenschaften besitzen:
$$(A) = \mathfrak{B}\,|\mathfrak{A}|, \qquad (B) = \mathfrak{A}\cdot|\mathfrak{B}|, \qquad (AB) = \mathfrak{E}. \tag{24,11}$$

Weiterhin ist $$\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) A = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right) B = 0. \tag{24,12}$$

Für quadratische Differentialoperatoren ist es notwendig, auch Ausdrücke für die Reihenmatrizen $\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)$ zu besitzen.

Analog (24,8) wird
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)\mathfrak{A}.$$

Ist nun (B_{ri}) die r-te Kolonne der Adjunktenmatrix (B), so gilt wegen (24,12) und (24,10)
$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)\cdot(B_{ri}) &= B_{r1}\frac{\partial}{\partial y_1} + B_{r2}\frac{\partial}{\partial y_2} + \cdots + B_{rn}\frac{\partial}{\partial y_n}\\ &= (B_{rk})\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\\ &= (B_{rk})\cdot\overline{\mathfrak{B}}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right).\end{aligned} \tag{24,13}$$

Da nach (24,11) $\mathfrak{B}\cdot(B) = |\mathfrak{B}|\cdot\mathfrak{E}$ und daher auch $(B)\cdot\overline{\mathfrak{B}} = |\mathfrak{B}|\cdot\mathfrak{E}$ ist, so wird
$$\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)|\mathfrak{B}|\cdot\mathfrak{A} = |\mathfrak{B}|\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right).$$

Mit $|\mathfrak{A}|\cdot|\mathfrak{B}| = 1$ folgt schließlich
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = |\mathfrak{A}|\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)\cdot|\mathfrak{A}|^{-1}\cdot\mathfrak{A}. \tag{24,14}$$

Beispiel: Die Transformation des Laplaceschen Operators.
In n-Variabeln lautet er
$$(\Delta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right).$$

Wird der Operator Δ auf die neuen Variabeln y transformiert, so ergibt sich mit (24,14) und (24,8):
$$(\Delta) = |\mathfrak{A}|\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)\cdot|\mathfrak{A}|^{-1}\cdot\mathfrak{A}\cdot\overline{\mathfrak{A}}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right).$$

Diese Formel benutzen wir, um Δ auf Zylinderkoordinaten zu transformieren.

Es ist mit den kartesischen Koordinaten

$$x = \varrho \cos \varphi\,, \qquad y = \varrho \sin \varphi\,, \qquad z = z\,.$$

Um die obigen Formeln anwenden zu können, setzen wir:

$$x_1 = x; \quad x_2 = y; \quad x_3 = z; \quad y_1 = \varrho; \quad y_2 = \varphi; \quad y_3 = z;$$

dann wird:
$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varrho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \varrho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \varrho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\varrho \sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

daraus folgt: $|\mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}|^{-1} = \varrho$

und
$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}^{-1} = \frac{1}{\varrho} \cdot \begin{pmatrix} \varrho\cos\varphi & \varrho\sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \varrho \end{pmatrix},$$

so daß
$$\mathfrak{A} \cdot \overline{\mathfrak{A}} = \frac{1}{\varrho} \cdot \begin{pmatrix} \varrho & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varrho} & 0 \\ 0 & 0 & \varrho \end{pmatrix} \text{ wird.}$$

Damit wird also
$$(\Delta) = \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho} \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right) \begin{pmatrix} \varrho & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varrho} & 0 \\ 0 & 0 & \varrho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \varrho} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix},$$

ausgerechnet:
$$(\Delta) = \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_2} \right).$$

25. λ-Matrizen

Definition 38: Wir nennen eine quadratische Matrix $f(\lambda)$, deren Elemente f_{ik} ganze rationale Funktionen eines skalaren Parameters λ sind, eine λ-Matrix. Ist m der höchste unter den Graden der f_{ik}, dann ist $f(\lambda)$ vom Grad m.

Die allgemeine Form einer λ-Matrix ist

$$f(\lambda) = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1 \lambda + \mathfrak{A}_2 \lambda^2 + \cdots + \mathfrak{A}_m \lambda^m = \sum_{\nu=0}^{m} \mathfrak{A}_m \lambda^m\,. \tag{25,1}$$

Dabei sind $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m$ von λ unabhängige Matrizen. Eine λ-Matrix ist also ein Polynom in λ mit Matrizenkoeffizienten.

Beispiel 1: Matrix nicht singulär. Ordnung 3. Grad 1.

$$f(\lambda) = \begin{pmatrix} 3\lambda+2 & \lambda+1 & 1 \\ 2\lambda-1 & 2 & \lambda \\ \lambda-2 & \lambda+2 & 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sind zwei λ-Matrizen $f(\lambda)$ und $g(\lambda)$ gegeben

$$f(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{m} \mathfrak{A}_\nu \lambda^\nu, \qquad g(\lambda) = \sum_{\mu=0}^{p} \mathfrak{B}_\mu \lambda^\mu, \tag{25,2}$$

so ist das Produkt

$$f(\lambda) \cdot g(\lambda) = \left(\sum_{\nu=0}^{m} \mathfrak{A}_\nu \lambda^\nu\right) \left(\sum_{\mu=0}^{p} \mathfrak{B}_\mu \lambda^\mu\right) = \sum_{\varrho=0}^{m+p} \mathfrak{C}_\varrho \lambda^\varrho \tag{25,3}$$

mit

$$\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{A}_0 \mathfrak{B}_0$$

$$\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{A}_0 \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_0$$

$$\vdots$$

oder allgemein

$$\mathfrak{C}_\varrho = \sum_{\varrho=\nu+\mu} \mathfrak{A}_\nu \mathfrak{B}_\mu .$$

Die $\sum\limits_{\varrho=\nu+\mu}$ bedeutet, daß alle zulässigen Glieder mit $\varrho = \nu + \mu$ summiert werden.

Die Produkte $\mathfrak{A}_\nu \mathfrak{B}_\mu$ werden nach der bekannten Regel für die Matrizenmultiplikation gebildet.

Die reziproke Matrix $f(\lambda)^{-1}$ ist im allgemeinen keine λ-Matrix; sie ist es nur für den Fall, daß $|f(\lambda)|$ von λ unabhängig und ungleich Null ist.

Ist wieder $f(\lambda)$ durch (25,1) gegeben und außerdem eine quadratische Matrix $\mathfrak{G}$ von derselben Ordnung wie $f(\lambda)$, so ist

$$f(\mathfrak{G}) = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{G}^1 \mathfrak{A}_1 + \cdots + \mathfrak{G}^m \mathfrak{A}_m = \sum_{\nu=0}^{m} \mathfrak{G}^\nu \mathfrak{A}_\nu, \tag{25,4}$$

dann ist

$$f(\lambda) - f(\mathfrak{G}) = \sum_{\nu=0}^{m} \lambda^\nu \mathfrak{A}_\nu - \sum_{\nu=0}^{m} \mathfrak{G}^\nu \mathfrak{A}_\nu = \sum_{\nu=0}^{m} [(\lambda \mathfrak{E})^\nu - \mathfrak{G}^\nu] \mathfrak{A}_\nu .$$

Nun ist

$$(\lambda \mathfrak{E})^\nu - \mathfrak{G}^\nu = (\lambda \mathfrak{E} - \mathfrak{G})(\mathfrak{E} \lambda^{\nu-1} + \mathfrak{G} \lambda^{\nu-2} + \cdots + \mathfrak{G}^{\nu-1}) .$$

Dabei stellt der 2. Faktor eine gewisse λ-Matrix $\mathfrak{R}(\lambda)$ dar; also wird

$$f(\lambda) - f(\mathfrak{G}) = (\lambda \mathfrak{E} - \mathfrak{G}) \mathfrak{R}(\lambda) . \tag{25,5}$$

Die Matrizen $\lambda \mathfrak{E} - \mathfrak{G}$ werden in der nächsten Ziffer diskutiert werden.

Die Determinante von (25,1) ist

$$|f(\lambda)| = \begin{vmatrix} f_{11}(\lambda) & f_{12}(\lambda) & \cdots & f_{1m}(\lambda) \\ \vdots & & & \\ f_{m1}(\lambda) & f_{m2}(\lambda) & \cdots & f_{mm}(\lambda) \end{vmatrix} . \tag{25,6}$$

Die Wurzeln der Determinantengleichung $|f(\lambda)| = 0$ seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, wobei n der Grad von $|f(\lambda)|$ in λ ist; sie brauchen nicht alle verschieden zu sein. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{F}(\lambda)$ die Adjunktenmatrix, so ist nach (7,1)

$$f(\lambda) \cdot \mathfrak{F}(\lambda) = \mathfrak{F}(\lambda) \cdot f(\lambda) = \mathfrak{E} \cdot |f(\lambda)| ; \tag{25,7}$$

p-malige Differentiation liefert:

$$\frac{d^p}{d\lambda^p}(f\mathfrak{F}) = \frac{d^p}{d\lambda^p}(\mathfrak{F}f) = \mathfrak{E}\cdot|f(\lambda)|^{(p)}, \tag{25,8}$$

wobei $|f(\lambda)|^{(p)}$ gesetzt ist für $\frac{d^p}{d\lambda^p}|f(\lambda)|$.

Es sind nun folgende Theoreme von Bedeutung:

Satz 72:

a) Wird in $f(\lambda)$ λ durch irgendeine Wurzel λ_s ersetzt, so ist $f(\lambda_s)$ notwendig singulär. Kommt λ_s nur einmal vor, so ist $f(\lambda_s)$ einfach entartet (Defekt 1).

b) Ist $f(\lambda_s)$ q-fach entartet, so sind wenigstens q der Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ gleich λ_s.

c) Die Matrix $f(\lambda_s)$ ist nicht notwendig mehrfach entartet, wenn λ_s eine mehrfache Wurzel ist.

d) Ist $f(\lambda_s)$ einfach entartet, so hat $\mathfrak{F}(\lambda_s)$ den Rang 1 und läßt sich als Produkt einer Zeilen- und einer Spaltenmatrix darstellen:

$$\mathfrak{F}(\lambda_s) = \begin{pmatrix} k_{1s} \\ \vdots \\ k_{ms} \end{pmatrix} (r_{1s} \ldots r_{ms}) = (k_{is})\cdot(r_{ks}). \tag{25,9}$$

e) Hat $f(\lambda_s)$ den Defekt q $(q > 1)$, so sind $\mathfrak{F}(\lambda)$ und ihre Ableitungen bis einschließlich $\mathfrak{F}(\lambda)^{q-2}$ für $\lambda = \lambda_s$ gleich Null.

Die Aussage a) ergibt sich wegen $|f(\lambda)| = 0$; da weiterhin für eine nicht mehrfach vorkommende Wurzel λ_s

$$\left(\frac{d}{d\lambda}|f(\lambda)|\right)_{\lambda=\lambda_s} = |f(\lambda)|^{(1)} \neq 0$$

ist, und $|f(\lambda)|^{(1)}$ linear und homogen in den ersten Unterdeterminanten von $|f(\lambda)|$ ist, so können diese Unterdeterminanten für $\lambda = \lambda_s$ nicht alle verschwinden. $f(\lambda_s)$ ist daher einfach entartet, hat also den Defekt 1.

Hat $f(\lambda_s)$ den Defekt q, so daß alle $(q-1)$-ten Unterdeterminanten von $f(\lambda)$ für $\lambda = \lambda_s$ verschwinden, dann sind alle Ableitungen von $|f(\lambda)|$ bis einschließlich $|f(\lambda)|^{(q-1)}$ Null für $\lambda = \lambda_s$, d. h. λ_s ist wenigstens eine q-fache Wurzel von $|f(\lambda)|$ (Aussage b). Dann ist aber auch für $\lambda = \lambda_s$ $\mathfrak{F}(\lambda)$ und ihre Ableitungen bis einschließlich $\mathfrak{F}(\lambda)^{(q-2)}$ gleich Null (Aussage e).

Die Aussage c bedeutet, daß $f(\lambda)|^{(1)}$ für $\lambda = \lambda_s$ verschwinden kann, ohne daß alle ersten Unterdeterminanten von $|f(\lambda)|$ Null sind.

Ist $f(\lambda_s)$ einfach entartet, so ist laut Definition $\mathfrak{F}(\lambda_s)$ ungleich Null und wegen (25,7) und nach Satz 36 vom Rang 1. Wegen Satz 38 ist dann die Darstellung (25,9) erlaubt (Aussage d).

Beispiel 1: Es sei $f(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda-2 & 3 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-4 \end{pmatrix}$.

Dann ist $|f(\lambda)| = (\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)$ und $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 4$.

Für jede Wurzel λ_s ist $f(\lambda)$ einfach entartet (Defekt 1; Aussage a, Satz 72).

Damit wird
$$\mathfrak{F}(\lambda)=\begin{pmatrix}(\lambda-3)(\lambda-4) & 0 & 0\\ 0 & (\lambda-4)(\lambda-2) & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-3)\end{pmatrix}.$$

Also
$$\mathfrak{F}(\lambda_1)=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\cdot(1 \quad 0 \quad 0),$$

$$\mathfrak{F}(\lambda_2)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\cdot(0 \quad -1 \quad 0),$$

$$\mathfrak{F}(\lambda_3)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 2\end{pmatrix}\cdot(0 \quad 0 \quad 1)$$

(vgl. Aussage d) Satz 72).

Beispiel 2: Es sei
$$f(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda-2 & -1 & 0\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{pmatrix}.$$

Dann ist $|f(\lambda)|=(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-3)$ und $\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$. Für jede Wurzel λ_s ist $f(\lambda)$ einfach entartet (Defekt 1).

Weiterhin wird
$$\mathfrak{F}(\lambda)=\begin{pmatrix}(\lambda-2)(\lambda-3) & \lambda-3 & 0\\ 0 & (\lambda-2)(\lambda-3) & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-2)(\lambda-2)\end{pmatrix}.$$

Also
$$\mathfrak{F}(\lambda_1)=\mathfrak{F}(\lambda_2)=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\cdot(0 \quad -1 \quad 0)$$

$$\mathfrak{F}(\lambda_3)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\cdot(0 \quad 0 \quad 1).$$

(vgl. Aussage c) und d) Satz 72).

Beispiel 3: Es sei
$$f(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{pmatrix}.$$

Dann ist $|f(\lambda)|=(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-3)$ und $\lambda_1=\lambda_2=2$, $\lambda_3=3$. Damit wird für $f(\lambda_2)$ der Rang $r=1$ und der Defekt ist 2. $\mathfrak{F}(\lambda_2)$ wird also Null (vgl. Aussage b) und e) Satz 72).

26. Die charakteristische Matrix

Die in (25,5) auftretende Matrix $(\lambda \mathfrak{E}-\mathfrak{G})$ stellt einen speziellen Fall einer λ-Matrix dar, der für lineare Substitionen Bedeutung hat. Statt $\mathfrak{G}$ schreiben wir zukünftig $\mathfrak{A}$. Dann nennt man

$$|f(\lambda)| = |\lambda \mathfrak{E}-\mathfrak{A}| \tag{26,1}$$

die charakteristische Funktion der Matrix $\mathfrak{A}$. $|f(\lambda)| = 0$ heißt die charakteristische Gleichung oder auch Säkulargleichung; $f(\lambda) = \lambda \mathfrak{E}-\mathfrak{A}$ selbst heißt charakteristische Matrix von $\mathfrak{A}$.

Die m nicht notwendig verschiedenen Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ der Säkulargleichung $|\lambda \mathfrak{E}-\mathfrak{A}| = 0$ heißen Eigenwerte von $\mathfrak{A}$, ihre Gesamtheit nennt man das Spektrum von $\mathfrak{A}$.

(26,1) angewendet auf eine Matrix liefert das Hamilton-Cayley-Theorem:

S a t z 73: Ist $\mathfrak{A}$ eine quadratische Matrix mit konstanten Elementen und $|f(\lambda)| = 0$ ihre charakteristische Gleichung, dann gilt auch

$$|f(\mathfrak{A})| = 0, \tag{26,2}$$

Sind die λ_i $(i = 1,2, \ldots n)$ die Eigenwerte der Matrix, so ist wegen

$$|f(\lambda)| = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n) = 0$$

auch

$$|f(\mathfrak{A})| = (\mathfrak{A}-\lambda_1 \mathfrak{E})(\mathfrak{A}-\lambda_2 \mathfrak{E})\ldots(\mathfrak{A}-\lambda_n \mathfrak{E}) = 0,$$

d. h. die Matrix genügt ihrer eigenen charakteristischen Gleichung.

B e i s p i e l 1: Es sei $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$,

dann ist $|f(\lambda)| = \begin{vmatrix} \lambda-8 & -3 \\ -7 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-11)(\lambda-1) = 0,$

daher auch $|f(\mathfrak{A})| = (\mathfrak{A}-11\,\mathfrak{E})(\mathfrak{A}-1\,\mathfrak{E}) = 0,$

d. h. $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 7 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = 0.$

Hat $\mathfrak{A}$ die Ordnung n, so wird die charakteristische Funktion von $\mathfrak{A}$ eine ganze rationale Funktion vom Grad n (Säkularpolynom), worin der Koeffizient von λ^n gleich 1 ist.

Es gilt nun

S a t z 74: Ist $|f(\lambda)| = \lambda^n - t_1 \lambda^{n-1} + t_2 \lambda^{n-2} \mp \cdots \pm t_n = 0$ (26,3)

die charakteristische Gleichung von $\mathfrak{A}$, dann ist t_i $(i = 1, \ldots, n)$ die Summe aller i-reihigen Hauptunterdeterminanten (= Unterdeterminanten der Hauptelemente) von $\mathfrak{A}$.

Denn der Koeffizient λ^{n-i} in $|\lambda \mathfrak{E}-\mathfrak{A}| = 0$ ist die Summe der Determinanten aller Unterdeterminanten, die dadurch erhalten werden, daß man $n-i$ Reihen von $\mathfrak{A}$ und entsprechende Kolonnen streicht.

Unter den $n!$ Termen von $|\lambda\,\delta_{ik}-a_{ik}|$ gibt es einen und nur einen derart, daß λ in jedem seiner $n!$ Faktoren enthalten ist, und zwar ist dieser Term das Produkt

$$\prod_{i=1}^{n} (\lambda - a_{ii}) = \lambda^n - \lambda^{n-1} \sum a_{ii} + \cdots$$

der diagonalen Elemente, $t_1 = \sum a_{ii}$ ist aber die Spur der Matrix.

Beispiel 2: Es sei
$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

dann ist
$$|f(\lambda)| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ -1 & \lambda-2 & -4 \\ -2 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 3\lambda - 4.$$

Durch Vergleich mit (26,2) folgt

$$\begin{aligned} t_0 &= 1, \\ t_1 &= \sum a_{ii} = 6, \\ t_2 &= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \\ t_3 &= |\mathfrak{A}| = 4. \end{aligned}$$

Da die beiden Gleichungen $|0\,\mathfrak{E} - \mathfrak{A}| = 0$ und $|\mathfrak{A}| = 0$ gleichwertig sind, so ist das Verschwinden mindestens eines Eigenwertes notwendig und hinreichend dafür, daß $\mathfrak{A}$ entartet ist. Ist dies nicht der Fall, so folgt aus $|\lambda\,\mathfrak{E} - \mathfrak{A}| = 0$ wegen

$$|\lambda\,\mathfrak{E} - \mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}| \cdot |\lambda\,\mathfrak{A}^{-1} - \mathfrak{E}|$$

offenbar
$$|\lambda^{-1}\mathfrak{E} - \mathfrak{A}^{-1}| = 0$$

und umgekehrt; d. h. man erhält den Satz:

Satz 75: Die reziproken Werte der Eigenwerte von $\mathfrak{A}$ sind die Eigenwerte von $\mathfrak{A}^{-1}$.

Beispiel 3: Es sei
$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{dann ist } |\mathfrak{A}| = 5 \text{ und } f(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -3 & \lambda-4 \end{pmatrix}.$$

Die Wurzeln von $|f(\lambda)| = 0$ sind $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

Weiterhin ist
$$\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 4/5 & -1/5 \\ -3/5 & 2/5 \end{pmatrix},$$

also
$$f^{-1}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda-4/5 & 1/5 \\ 3/5 & \lambda-2/5 \end{pmatrix}.$$

Die Wurzeln von $|f^{-1}(\lambda)| = 0$ sind aber $\lambda_1^{-1} = 1$, $\lambda_2^{-1} = 1/5$.

Ist $\mathfrak{A}$ eine hermitische Matrix (vgl. Ziffer 18), so gilt folgender Satz:

Satz 76: Die charakteristischen Wurzeln einer hermitischen Matrix sind sämtlich reell.

In Ziffer 18 wurde gezeigt, daß die Diagonalelemente einer hermitischen Matrix reell sind; die Elemente a_{ik} sind im übrigen gleich a^*_{ki}, d. h. a_{ik} und a_{ki} sind stets konjugiert komplex.

Wir müssen nun beweisen, daß dann

$$|f(\lambda)| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \tag{26,4}$$

nur reelle Wurzeln liefert.

Für (26,4) kann nach Multiplikation mit $(-1)^n$ auch geschrieben werden

$$|f(\lambda)| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{26,5}$$

Diese Gleichung multiplizieren wir nun mit $|f(-\lambda)|$, d. h. mit derjenigen Determinante, bei der λ durch $-\lambda$ ersetzt wird. Dann ergibt sich

$$|f(\lambda)| \cdot |f(-\lambda)| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}+\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} c_{11}-\lambda^2 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-\lambda^2 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn}-\lambda^2 \end{vmatrix}$$

mit $c_{ik} = \sum_{\varrho=1}^{n} a_{i\varrho}\, a_{\varrho k}$.

Wäre nun $i\alpha$ eine Wurzel von $|f(\lambda)| = 0$, so müßte sein

$$|f(i\alpha)| \cdot |f(-i\alpha)| = \begin{vmatrix} c_{11}+\alpha^2 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}+\alpha^2 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn}+\alpha^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{26,6}$$

Nun läßt sich (26,6) wegen (26,3) darstellen als

$$|f(i\alpha)| \cdot |f(-i\alpha)| = \alpha^{2n} + t_1\, \alpha^{2n-2} + \cdots t_n, \tag{26,7}$$

wobei t_i die i-reihigen Hauptunterdeterminanten von $|c_{ik}|$ sind. Diese sind aber positiv.

Mithin wird für $\alpha \gtrless 0$

$$|f(i\alpha)| \cdot |f(-i\alpha)| > 0. \tag{26,8}$$

Damit ist bewiesen, daß (26,6) nicht erfüllt ist. Die Wurzeln einer hermitischen Matrix sind also reell.

In Satz 76 ist als Spezialfall der Satz enthalten, daß die Wurzeln einer symmetrischen Matrix ($a_{ik} = a_{ki}$) mit reellen Elementen auch reell sind.

Beispiel 4: Es sei (nach Ziffer 18)

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1+2i \\ 1-2i & 2 \end{pmatrix} \text{ eine hermitische Matrix.}$$

Dann ist
$$|f(\lambda)| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1+2i \\ 1-2i & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0,$$

also $\lambda_{1,2} = {}^5/_2 \pm {}^1/_2 \sqrt{21}$, d. h. λ_i ist reell.

Nun sind die Eigenwerte von $\mathfrak{A}^2$ bei jedem $\mathfrak{A}$ gleich den Quadraten der Eigenwerte von $\mathfrak{A}$ (vgl. z. B. Beispiel 3. $\mathfrak{A}^2 = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 18 & 19 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5^2$), sind also gewiß $\geqq 0$, wenn $\mathfrak{A}$ hermitisch ist. Eine hermitische Matrix, bei der alle Eigenwerte $\geqq 0$ sind, nennt man nicht-negativ definit. Eine nicht-negativ definite hermitische Matrix, deren Eigenwerte sämtlich > 0 sind, heißt positiv definit. Das Quadrat einer hermitischen Matrix ist wegen $(\mathfrak{A}^2)^\dagger = \mathfrak{A}^\dagger \mathfrak{A}^\dagger = \mathfrak{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2$ gewiß hermitisch (vgl. Ziffer 19). Also ist das Quadrat einer hermitischen Matrix eine nicht-negativ definite hermitische Matrix. Umgekehrt gibt es zu jeder nicht-negativ definiten hermitischen Matrix $\mathfrak{A}$ Matrizen $\mathfrak{B}$ derart, daß $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}^2$ wird. Ist z. B. $\mathfrak{A}$ eine Diagonalmatrix

$$\mathfrak{A} = (a_{ii}\,\delta_{ik}),$$

dann wird die Gleichung $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}^2$ durch die wegen $\sqrt{a_{ii}} \gtreqless 0$ gewiß hermitische Diagonalmatrix

$$\mathfrak{B} = \left(\sqrt{a_{ii}}\,\delta_{ik}\right)$$

offenbar befriedigt. Es sind also die nicht-negativ definiten hermitischen Matrizen diejenigen Matrizen, die als Quadrate von hermitischen (oder auch von nicht-negativ definiten hermitischen) Matrizen dargestellt werden können; dagegen sind die positiv definiten hermitischen Matrizen Quadrate von positiv definiten Matrizen. Da eine Matrix dann und nur dann entartet ist ($|\mathfrak{A}| = 0$), wenn mindestens ein Eigenwert verschwindet, und da die Quadrate der Eigenwerte von $\mathfrak{A}$ die Eigenwerte von $\mathfrak{A}^2$ sind, so hat eine hermitische Matrix $\mathfrak{A}$ dann und nur dann eine Reziproke, wenn $\mathfrak{A}^2$ nicht nur nicht-negativ definit, sondern sogar positiv definit ist.

Ist $\mathfrak{A}$ hermitisch und nicht entartet, so ist auch $\mathfrak{A}^{-1}$ hermitisch. Aus $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^\dagger$ folgt nämlich $\mathfrak{B}^\dagger \mathfrak{A}^\dagger = \mathfrak{A}^\dagger \mathfrak{B}^\dagger = \mathfrak{E}$, also $\mathfrak{B}^\dagger = \mathfrak{B}$, da $\mathfrak{A}$ nur eine Reziproke haben kann. Ist außerdem $\mathfrak{A}$ positiv definit, so ist es auch $\mathfrak{A}^{-1}$; denn die Eigenwerte von $\mathfrak{A}^{-1}$ sind nach Satz 75 die reziproken Eigenwerte von $\mathfrak{A}$, also ebenfalls positiv.

Im Gegensatz zu Satz 76 gilt

Satz 77: Die charakteristischen Wurzeln einer schiefsymmetrischen Matrix ($a_{ik} = -a_{ki}$) sind sämtlich rein imaginär.

Der Beweis verläuft ähnlich wie zu Satz 76. Die Determinante einer schiefsymmetrischen Matrix ist für ungerade Ordnung gleich Null. Dasselbe gilt für ihre Hauptunterdeterminanten. Wegen (26,3) kann daher $|f(\lambda)|$ dargestellt werden als

$$|f(\lambda)| = \lambda^n + t_2\,\lambda^{n-2} + t_4\,\lambda^{n-4} + \cdots \tag{26,9}$$

Ist $\lambda > 0$, so folgt

$$|f(\pm\lambda)| = (\pm 1)^n (\lambda^n + t_2 \lambda^{n-2} + t_4 \lambda^{n-4} + \cdots). \qquad (26,10)$$

Nun hat (26,9) nur nicht-negative Glieder, λ^n selbst ist positiv. Also kann $|f(\lambda)| = 0$ keine von Null verschiedenen reellen Wurzeln haben.

Beispiel 5: Es sei

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

dann ist $\quad |f(\lambda)| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0, \quad$ d. h. $\lambda_{1,2} = \pm 2\sqrt{i}$,

also rein imaginär.

Für die Eigenwerte einer unitären Matrix gilt folgender

Satz 78: Die charakteristischen Wurzeln einer unitären Matrix ($\mathfrak{U}^\dagger = \mathfrak{U}^{-1}$) sind von Betrag Eins.

Beweis: Ist λ eine charakteristische Wurzel der unitären Matrix $\mathfrak{U}$, so ist $\lambda + \frac{1}{\lambda}$ ein Eigenwert der hermitischen Matrix $\mathfrak{U} + \mathfrak{U}^{-1} = \mathfrak{U} + \mathfrak{U}^\dagger$ (vgl. Satz 59) und $\lambda - \frac{1}{\lambda}$ ist ein Eigenwert der schiefsymmetrischen Matrix $\mathfrak{U} - \mathfrak{U}^{-1} = \mathfrak{U} - \mathfrak{U}^\dagger$. Wird wegen Satz 59, 76, 77 gesetzt $\lambda + \frac{1}{\lambda} = 2r$, $\lambda - \frac{1}{\lambda} = 2is$, $i = \sqrt{-1}$, wobei r und s reell sind, so folgt:

$$\lambda = r + is, \quad \frac{1}{\lambda} = r - is,$$

d. h. es ist $r^2 + s^2 = 1$, also $\lambda_{1,2} = \pm 1$.

Ein zweiter einfacher Beweis ergibt sich folgendermaßen: $|\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{U}| = 0$ kann geschrieben werden: $|\mathfrak{U}| \cdot |\lambda\mathfrak{U}^{-1} - \mathfrak{E}| = 0$. Nun ist nach Satz 75 der Eigenwert von $\mathfrak{U}^{-1}$ gleich $\frac{1}{\lambda}$, d. h. der zweite Term verschwindet. Nach (19,6) war aber $|\mathfrak{U}| = \pm 1$, d. h. die Eigenwerte einer unitären Matrix sind ± 1.

Beispiel 6: Es sei wie in Ziffer 19

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} i \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} i & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

dann ist $\quad |f(\lambda)| = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda & \frac{1}{\sqrt{2}} i \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} i & -\frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0, \quad$ d. h. $\lambda_{1,2} = \pm 1$.

Über die Eigenwerte einer orthogonalen Matrix besteht folgender

Satz 79: Die komplexen charakteristischen Wurzeln einer reellen orthogonalen Matrix sind paarweise konjugiert komplex. Außerdem haben alle den Absolutwert 1, die reellen sind also ± 1. Bei ungerader Dimensionszahl muß wenigstens ein Eigenwert reell sein.

Der Beweis ergibt sich folgendermaßen (nach Briochi):

Es sei $\mathfrak{O} = (o_{ik})$ eine orthogonale Matrix. Dann ist

$$|f(\lambda)| = \begin{vmatrix} o_{11}-\lambda & o_{12} & & o_{1n} \\ o_{21} & o_{22}-\lambda & \dots & o_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ o_{n1} & o_{n2} & \dots & o_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0\,. \tag{26,11}$$

Multiplizieren wir $|f(\lambda)|$ mit

$$|f(-\lambda)| = \begin{vmatrix} o_{11}+\lambda & o_{12} & \dots & o_{1n} \\ o_{21} & o_{22}+\lambda & \dots & o_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ o_{n1} & o_{n2} & \dots & o_{nn}+\lambda \end{vmatrix},$$

so ergibt sich

$$|f(\lambda)|\cdot|f(-\lambda)| = \begin{vmatrix} 1-\lambda^2 & (o_{21}-o_{12})\lambda & \dots & (o_{n1}-o_{1n})\lambda \\ (o_{12}-o_{21})\lambda & 1-\lambda^2 & \dots & (o_{n2}-o_{2n})\lambda \\ \hdotsfor{4} \\ (o_{1n}-o_{n1})\lambda & (o_{2n}-o_{n2})\lambda & \dots & 1-\lambda^2 \end{vmatrix}.$$

Für $\lambda \gtrless 0$ folgt daher

$$|f(\lambda)|\cdot|f(-\lambda)| = \lambda^n \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda}-\lambda & o_{21}-o_{12} & \dots & o_{n1}-o_{1n} \\ o_{12}-o_{21} & \frac{1}{\lambda}-\lambda & \dots & o_{n2}-o_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ o_{1n}-o_{n1} & o_{2n}-o_{n2} & \dots & \frac{1}{\lambda}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Setzt man $\frac{1}{\lambda}-\lambda = \varrho$, $o_{rs}-o_{sr} = p_{rs}$, so wird

$$\frac{|f(\lambda)|\cdot|f(-\lambda)|}{\lambda^n} = \begin{vmatrix} p_{11}+\varrho & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22}+\varrho & \dots & p_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn}+\varrho \end{vmatrix}. \tag{26,12}$$

Da $p_{rs} = -p_{sr}$, so ist (26,12) die Determinante einer schiefsymmetrischen Matrix. Diese hat aber nach Satz 77 keine reellen Eigenwerte. Daher folgt, daß $|f(\lambda)| = 0$ keine reelle Wurzel zuläßt, die von $+1$ oder -1 verschieden ist. Multipliziert man $|f(\lambda)|$ mit $|\mathfrak{O}|\cdot$, so folgt

$$|\mathfrak{O}|\cdot|f(\lambda)| = \begin{vmatrix} 1-o_{11}\lambda & o_{12}\lambda & \dots & o_{1n}\lambda \\ o_{21}\lambda & 1-o_{22}\lambda & \dots & o_{2n}\lambda \\ \hdotsfor{4} \\ o_{n1}\lambda & o_{n2}\lambda & \dots & 1-o_{nn}\lambda \end{vmatrix} = \lambda^n \cdot \left| f\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right|, \tag{26,13}$$

d. h. $|f(\lambda)| = 0$ ist eine reziproke Gleichung.

Ist n ungerade und wird

$$\lambda = -|\mathfrak{O}|$$

gesetzt, so wird, da $|\mathfrak{O}| = \pm 1$ ist,

$$\frac{1}{\lambda} = -|\mathfrak{O}| \quad \text{und} \quad \lambda^n = -|\mathfrak{O}|\,.$$

Wegen (26,13) ergibt sich aber nun

$$|\mathfrak{O}| \cdot |f(-|\mathfrak{O}|)| = -|\mathfrak{O}| \cdot |f(-|\mathfrak{O}|)|,$$

d. h.

$$|f(-|\mathfrak{O}|)| = 0.$$

Bei ungeraden n hat daher die Gleichung $|f(\lambda)| = 0$ die Wurzel $\lambda = -|\mathfrak{O}|$. Ist n gerade und $|\mathfrak{O}| = -1$, so hat $|f(\lambda)| = 0$ die Wurzeln $\lambda_{1,2} = \pm 1$; denn aus (26,13) folgt mit $|\mathfrak{O}| = -1$

$$|f(\pm 1)| = 0.$$

Beispiel 7: Nach Ziffer 20 war $\mathfrak{O} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ eine orthogonale Matrix, daher folgt $|\mathfrak{O}| = +1$, $|f(\lambda)| = \lambda^2 + 1 = 0$, $\lambda_{1,2} = \pm i$.

27. Adjunkten und abgeleitete Adjunkten einer charakteristischen Matrix

Die in Ziffer 25 aufgetretenen Adjunktenmatrizen $\mathfrak{F}(\lambda)$ sollen nun näher untersucht werden. Setzt man entsprechend Satz 77

$$|f(\lambda)| = \lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + p_2 \lambda^{n-2} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i), \tag{27,1}$$

dann ist für zunächst beliebiges x

$$\frac{|f(\lambda)| - |f(x)|}{\lambda - x} = \lambda^{n-1} + (x + p_1)\lambda^{n-2} + \cdots + (x^{n-1} + p_1 x^{n-2} + \ldots + p_{n-2} x + p_{n-1}),$$
$$= \varphi(\lambda, x). \tag{27,2}$$

Wenn $x = \lambda_r$, wobei λ_r eine Wurzel von $|f(\lambda)| = 0$ ist, so reduziert sich (27,2) auf

$$\varphi(\lambda, \lambda_r) = \frac{|f(\lambda)|}{\lambda - \lambda_r} = \prod_{i \neq r} (\lambda - \lambda_i). \tag{27,3}$$

Differenziert man (27,2) nach x, so ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x}\varphi(\lambda, x) = \frac{|f(\lambda)| - |f(x)|}{(\lambda - x)^2} - \frac{|f(x)|^{(1)}}{\lambda - x}, \tag{27,4}$$

wobei $|f(x)|^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x}|f(x)|$ ist.

Tritt nun eine Wurzel λ_i von $|f(\lambda)| = 0$ mehrfach, z. B. 2-fach auf, so wird mit $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_2}\varphi(\lambda, \lambda_2) = \frac{|f(\lambda)|}{(\lambda - \lambda_2)^2} = (\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4) \cdots (\lambda - \lambda_n) \tag{27,5}$$

oder allgemein, ist λ_i eine s-fache Wurzel, so daß $|f(\lambda)|^{(i)} = 0$ für $i = 1, 2, \cdots s-1$, so erhält man nach $p \leq s-1$-maliger Differentiation von (27,2) nach x für $x = \lambda_s$

$$\frac{1}{p!}\frac{\partial^p}{\partial \lambda_s^p}\varphi(\lambda, \lambda_s) = \frac{|f(\lambda)|}{(\lambda - \lambda_s)^{p+1}} = (\lambda - \lambda_s)^{s-p+1}(\lambda - \lambda_{s+1}) \cdots (\lambda - \lambda_n). \tag{27,6}$$

Da (27,3) und (27,6) für jedes λ gelten, können sie nach Satz 73 auch auf eine quadratische Matrix übertragen werden, indem λ durch $\mathfrak{A}$ ersetzt wird.

(27,3) ergibt somit

$$\varphi(\mathfrak{A}, \lambda_r) = \prod_{i \neq r} (\mathfrak{A} - \lambda_i \mathfrak{E}) \tag{27,7}$$

und (27,6)

$$\frac{1}{p!}\frac{\partial^p}{\partial\lambda_s^p}\varphi(\mathfrak{A},\lambda_s) = (\mathfrak{A}-\lambda_s\mathfrak{E})^{s-p-1}(\mathfrak{A}-\lambda_{s+1}\mathfrak{E})\dots(\mathfrak{A}-\lambda_n\mathfrak{E}) \tag{27,8}$$

mit $0 \leq p \leq s-1$.

Wird nun in (27,2) x durch $\lambda\mathfrak{E}$ und λ durch $\mathfrak{A}$ ersetzt, so folgt mit $|f(\mathfrak{A})| = 0$

$$(\lambda\mathfrak{E}-\mathfrak{A})\,\varphi(\mathfrak{A},\lambda) = |f(\lambda)|\cdot\mathfrak{E}, \tag{27,9}$$

d. h. $\varphi(\mathfrak{A},\lambda)$ ist die Adjunktenmatrix zu $f(\lambda)$. Sie werde wie oben mit $\mathfrak{F}(\lambda)$ bezeichnet. Dann ergibt sich speziell

$$\mathfrak{F}(\lambda_r) = \varphi(\mathfrak{A},\lambda_r) = (-1)^{n-1}\prod_{i\neq r}(\lambda_i\mathfrak{E}-\mathfrak{A}) = (-1)^{n-1}\prod_{i\neq r} f(\lambda_i). \tag{27,10}$$

Für die Ableitungen von $\mathfrak{F}(\lambda_s)$ folgt

$$\frac{1}{p!}\mathfrak{F}^{(p)}_{(\lambda_s)} = (-1)^{n-p-1}\,[f(\lambda_s)^{s-p-1}\cdot f(\lambda_{s+1})\dots f(\lambda_n)] \tag{27,11}$$

mit $\mathfrak{F}^{p}_{(\lambda_s)} = \left(\frac{\partial^p}{\partial\lambda^p}\mathfrak{F}(\lambda)\right)_{\lambda=\lambda_s}$.

Beispiel 1: Es sei $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$ (vgl. Beispiel 1 Ziffer 25)

mit $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 4$.

Dann ist nach (27,10)

$$\mathfrak{F}(\lambda_1) = (-1)^2 f(\lambda_2)\cdot f(\lambda_3) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{F}(\lambda_2) = (-1)^2 f(\lambda_1)\cdot f(\lambda_3) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{F}(\lambda_3) = (-1)^2 f(\lambda_1)\cdot f(\lambda_2) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Beispiel 2: Es sei $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ (vgl. Beispiel 2 Ziffer 25)

mit $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3$.

Dann ist nach (27,10)

$$\mathfrak{F}(\lambda_1) = (-1)^2 f(\lambda_2)\cdot f(\lambda_3) = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{F}(\lambda_3) = (-1)^2 f(\lambda_2)\cdot f(\lambda_2) = \begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & +1\end{pmatrix},$$

während nach (27,11) mit $n = 3$, $s = 2$, $p = 1$

$$\mathfrak{F}^{(1)}(\lambda_2) = (-1)^{3-1-1}[f(\lambda_2)]^{2-1-1} \cdot f(\lambda_3) = -f(\lambda_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach (27,9) war $(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})\,\mathfrak{F}(\lambda) = |f(\lambda)| \cdot \mathfrak{E}$. Diese Gleichung kann nun, um die Reziproke $(\lambda\,\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}$ zu bestimmen, in folgender Weise geschrieben werden

$$(\lambda\,\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1} = \frac{\mathfrak{F}\,\lambda}{|f(\lambda)|} = \frac{\mathfrak{F}(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)}. \tag{27,12}$$

Durch Partialbruchzerlegung erhält man

$$\frac{\mathfrak{F}(\lambda)}{|f(\lambda)|} = \frac{A_1}{\lambda - \lambda_1} + \frac{A_2}{\lambda - \lambda_2} + \cdots + \frac{A_n}{\lambda - \lambda_n}, \tag{27,13}$$

wobei A_r $(r = 1, 2, \ldots, n)$ Konstante sind.

Um A_r zu erhalten, ist die Gleichung mit $(\lambda - \lambda_r)$ zu multiplizieren und λ durch λ_r zu ersetzen. Das liefert mit

$$|f(\lambda_r)|^{(1)} = \frac{\partial}{\partial\lambda}|f(\lambda)|_{\lambda = \lambda_r}$$

$$A_r = \frac{\mathfrak{F}(\lambda_r)}{|f(\lambda_r)|^{(1)}}, \tag{27,14}$$

also

$$(\lambda\,\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\mathfrak{F}(\lambda_r)}{|f(\lambda_r)|^{(1)}(\lambda - \lambda_r)}. \tag{27,15}$$

$(\lambda\,\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}$ wird gewöhnlich die Resolvente von $\mathfrak{A}$ genannt.

Von dieser Formel wird Gebrauch gemacht, wenn es sich darum handelt, ein Polynom zu berechnen. Auf Grund eines Satzes von SYLVESTER ist.

Satz 80:
$$\mathfrak{P}(\mathfrak{A}) = \sum_{r=1}^{n} \mathfrak{P}(\lambda_r) \cdot \mathfrak{Q}(\lambda_r), \tag{27,16}$$

wobei $\mathfrak{P}(\mathfrak{A})$ ein Polynom von $\mathfrak{A}$ und

$$\mathfrak{Q}(\lambda_r) = \frac{\mathfrak{F}(\lambda_r)}{|f(\lambda_r)|^{(1)}} = \frac{\prod\limits_{i \neq r}(\lambda_i\mathfrak{E} - \mathfrak{A})}{\prod\limits_{i \neq r}(\lambda_i - \lambda_r)} = \frac{\prod\limits_{i \neq r}(\mathfrak{A} - \lambda_i\mathfrak{E})}{\prod\limits_{i \neq r}(\lambda_r - \lambda_i)} \tag{27,17}$$

ist. Die $\mathfrak{Q}(\lambda_r)$ sind aber die Matrizen der LAGRANGEschen Polynome

$$L_1(x) = \frac{(x - a_2)(x - a_3)\ldots(x - a_n)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\ldots(a_1 - a_n)}, \quad \ldots, \quad L_n(x) = \frac{(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{n-1})}{(a_n - a_1)(a_n - a_2)\ldots(a_n - a_{n-1})}$$

die die Eigenschaften besitzen, daß $L_\nu(x)$ an der Stelle $x = a_\nu$ den Wert 1 hat, an den übrigen $(n-1)$ Stellen aber verschwindet.

Für die Polynommatrizen ist daher

$$\mathfrak{Q}(\lambda_r) = \begin{cases} \mathfrak{E} \text{ für } \mathfrak{A} = \lambda_r\,\mathfrak{E} \\ \mathfrak{O} \text{ für } \mathfrak{A} = \lambda_s\,\mathfrak{E} \qquad (s \neq r). \end{cases}$$

Weiterhin gilt

$$\sum_{r=1}^{n} \mathfrak{Q}(\lambda_r) = \mathfrak{E}. \qquad (27,18)$$

Beispiel 3: Ist $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, so folgt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$,

$$\mathfrak{Q}(\lambda_1) = \frac{\mathfrak{A}-\lambda_2\mathfrak{E}}{\lambda_1-\lambda_2} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{Q}(\lambda_2) = \frac{\mathfrak{A}-\lambda_1\mathfrak{E}}{\lambda_2-\lambda_1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix},$$

mithin

$$\sum_{r=1}^{2} \mathfrak{Q}(\lambda_r) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \mathfrak{E}.$$

Der Beweis des Satzes 80 verläuft nun folgendermaßen:
Es sei das Polynom $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}(\mathfrak{A})$ m-Grades gegeben durch

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{P}(\mathfrak{A}) = \alpha_0\mathfrak{E} + \alpha_1\mathfrak{A} + \cdots + \alpha_m\mathfrak{A}^m, \qquad (27,19)$$

wobei α_i Konstante und $\mathfrak{A}$ eine Matrix der Ordnung n ist. Ist $m \geqq n$, so läßt sich $\mathfrak{B}$ mit Hilfe des Hamilton-Cayleyschen Satzes auf ein Polynom $(n-1)$-Grades zurückführen. Ist $|f(\lambda)|$ die charakteristische Funktion

$$|f(\lambda)| = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\ldots(\lambda-\lambda_n),$$

so gilt auch

$$(\mathfrak{A}-\lambda_1\mathfrak{E})(\mathfrak{A}-\lambda_2\mathfrak{E})\ldots(\mathfrak{A}-\lambda_n\mathfrak{E}) = 0,$$

d. h. aber $\mathfrak{A}^n$ und auch alle höheren Potenzen von $\mathfrak{A}$ lassen sich durch ein Polynom $(n-1)$-Grades in $\mathfrak{A}$ darstellen. Dasselbe gilt für alle Polynome, deren Grad m die Zahl $(n-1)$ übertrifft. Man erhält somit die Darstellung

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{P}(\mathfrak{A}) = \beta_0\mathfrak{E} + \beta_1\mathfrak{A} + \cdots + \beta_{n-1}\mathfrak{A}^{n-1}. \qquad (27,20)$$

Zur Bestimmung des Polynoms (27,20) ersetzt man in (27,19) $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A}-\lambda_r\mathfrak{E}+\lambda_r\mathfrak{E}$ und erhält

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{P}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{P}(\lambda_r)\mathfrak{E} + \gamma_1(\mathfrak{A}-\lambda_r\mathfrak{E}) + \cdots + \gamma_m(\mathfrak{A}-\lambda_r\mathfrak{E})^m,$$

wobei die γ_i Konstante sind. Alsdann multipliziert man jede der n-Gleichungen mit den zugehörigen Lagrangeschen Polynommatrizen $\mathfrak{Q}(\lambda_r)$ und erhält wegen $\Pi(\mathfrak{A}-\lambda_r\mathfrak{E}) = 0$

$$\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{Q}(\lambda_r) = \mathfrak{P}(\lambda_r)\cdot\mathfrak{Q}(\lambda_r),$$

also summiert

$$\mathfrak{B}\sum_{r=1}^{n}\mathfrak{Q}(\lambda_r) = \sum_{r=1}^{n}\mathfrak{P}(\lambda_r)\,\mathfrak{Q}(\lambda_r),$$

was wegen (27,18) ergibt

$$\mathfrak{B} = \sum_{r=1}^{n}\mathfrak{P}(\lambda_r)\,\mathfrak{Q}(\lambda_r).$$

Beispiel 4: Als Beispiel der Reduzierung eines Polynoms auf den $(n-1)$-Grad werde die Matrix $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}(\mathfrak{A}) = \alpha_0\mathfrak{E} + \alpha_1\mathfrak{A} + \alpha_2\mathfrak{A}^2$ betrachtet. Es soll also werden $\mathfrak{B} = \beta_0\mathfrak{E} + \beta_1\mathfrak{A}$. Nach Satz 73 ist $(\mathfrak{A}-\lambda_1\mathfrak{E})(\mathfrak{A}-\lambda_2\mathfrak{E}) = 0$. Ersetzt man $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A}-\lambda_r\mathfrak{E}+\lambda_r\mathfrak{E}$, $(r = 1, 2)$, so folgt:

$$\mathfrak{B} = \alpha_0 \mathfrak{E} + \alpha_1 (\mathfrak{A} - \lambda_r \mathfrak{E} + \lambda_r \mathfrak{E}) + \alpha_2 (\mathfrak{A} - \lambda_r \mathfrak{E} + \lambda_r \mathfrak{E})^2$$

$$= \mathfrak{P}(\lambda_r)\,\mathfrak{E} + \gamma_1 (\mathfrak{A} - \lambda_r \mathfrak{E}) + \gamma_2 (\mathfrak{A} - \lambda_r \mathfrak{E})^2$$

mit $\mathfrak{P}(\lambda_r) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_r + \alpha_2 \lambda_r^2; \quad \gamma_1 = \alpha_1 + 2\,\alpha_2 \lambda_r; \quad \gamma_2 = \alpha_2 .$

Multiplikation mit $\mathfrak{Q}(\lambda_1) = \frac{\mathfrak{A} - \lambda_2 \mathfrak{E}}{\lambda_1 - \lambda_2}$ bzw. $\mathfrak{Q}(\lambda_2) = \frac{\mathfrak{A} - \lambda_1 \mathfrak{E}}{\lambda_2 - \lambda_1}$ ergibt schließlich

$$\mathfrak{B} = \beta_0 \mathfrak{E} + \beta_1 \mathfrak{A}$$

mit $$\beta_0 = -\frac{\alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_1^2}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_2 - \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_2^2}{\lambda_2 - \lambda_1}\lambda_1 ,$$

$$\beta_1 = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_1^2}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{\alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 \lambda_2^2}{\lambda_2 - \lambda_1} .$$

Ist speziell $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}(\mathfrak{A}) = 2\,\mathfrak{E} + 3\,\mathfrak{A} + \mathfrak{A}^2$ mit $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, so folgt wegen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$, $\beta_0 = -3$, $\beta_1 = 9$

$$\mathfrak{B} = -3\,\mathfrak{E} + 9\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 9 \\ 27 & 33 \end{pmatrix},$$

ein Ergebnis, das auch durch direkte Ausrechnung erhalten wird.

Beispiel 5: (vgl. Beispiel 1).

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4,$$

daher wird $\mathfrak{F}(\lambda_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad 0 \quad 0), \qquad \mathfrak{F}(\lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (0 \quad -1 \quad 0),$

$$\mathfrak{F}(\lambda_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0 \quad 0 \quad 2),$$

$$|f(\lambda_1)|^{(1)} = 2, \quad |f(\lambda_2)|^{(1)} = -1, \quad |f(\lambda_3)|^{(1)} = 2,$$

daher $2\,\mathfrak{p}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{p}(\lambda_1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \;\; 0 \;\; 0) + \mathfrak{p}(\lambda_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \;\; -1 \;\; 0) + \mathfrak{p}(\lambda_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \;\; 0 \;\; 2),$

also $\mathfrak{p}(\mathfrak{A}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{p}(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \mathfrak{p}(\lambda_2) & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{p}(\lambda_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Beispiel 6: Der Satz 80 kann auch dazu benutzt werden, um die e-Funktionen zu berechnen. Es sei gegeben

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{A}) = e^{\mathfrak{A}}$$

mit $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Dann folgt $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\mathfrak{Q}(\lambda_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{Q}(\lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Daher wird wegen $\quad \mathfrak{P}(\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots$

$$\mathfrak{P}(\lambda_1) = e, \quad \mathfrak{P}(\lambda_2) = e^2.$$

Also
$$\begin{aligned} \mathfrak{P}(\mathfrak{A}) &= \mathfrak{P}(\lambda_1)\,\mathfrak{Q}(\lambda_1) + \mathfrak{P}(\lambda_2)\cdot\mathfrak{Q}(\lambda_2) \\ &= e\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + e^2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e & e^2 - e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} = e\begin{pmatrix} 1 & e-1 \\ 0 & e \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

28. Konvergenz und Summation unendlicher Potenzreihen

Es sei
$$f(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \lambda^\nu \tag{28,1}$$

eine gewöhnliche Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten in der komplexen Variabeln λ. Wenn für eine Matrix $\mathfrak{A}$ der Ordnung n mit komplexen Elementen jedes Element von

$$f(\mathfrak{A}) = \sum_{\nu=0}^{h} \alpha_\nu \mathfrak{A}^\nu \tag{28,2}$$

sich mit $h \to \infty$ einem Grenzwert nähert, dann existiert die Matrix

$$f(\mathfrak{A}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \mathfrak{A}^\nu. \tag{28,3}$$

Es besteht nun über die Konvergenz folgender

Satz 81: Die Potenzreihe $f(\mathfrak{A})$ konvergiert dann und nur dann, wenn jeder Eigenwert von $\mathfrak{A}$ innerhalb oder auf dem Konvergenzkreis von $f(\lambda)$ liegt und für jeden l-fachen Eigenwert, der auf dem Konvergenzkreis liegt, die $(l-1)$te Ableitung $f^{(l-1)}(\lambda_\nu)$ konvergiert.

Beweis. Für jeden l-fachen Eigenwert besteht eine Matrix der Ordnung

$$\mathfrak{A}_\nu = \begin{pmatrix} \lambda_\nu & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_\nu & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & & \cdots & \lambda_\nu \end{pmatrix}.$$

$\mathfrak{A}$ werde dann als Diagonalmatrix in der Weise aus $\mathfrak{A}_\nu$ gebildet, daß die $\mathfrak{A}_\nu$ Diagonalelemente sind. $f(\mathfrak{A})$ ist entsprechend darstellbar durch die $f(\mathfrak{A}_\nu)$ und es konvergiert nur dann $f(\mathfrak{A})$, wenn jedes $f(\mathfrak{A}_\nu)$ konvergiert. Es sei nun $\mathfrak{A}_\nu - \lambda_\nu \mathfrak{E} = \mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{C}^{l-1} \neq 0$, $\mathfrak{C}^l = 0$.

Dann wird für $h > 0$

$$\begin{aligned} f_h(\mathfrak{A}_\nu) &= \sum_{\varrho=0}^{h} \alpha_\varrho (\lambda_\nu \mathfrak{E} + \mathfrak{C})^\varrho \\ &= \sum_{\varrho=0}^{h} \alpha_\varrho \sum_{\sigma=0}^{s} \binom{\varrho}{\sigma} \lambda_\nu^{\varrho-\sigma} \mathfrak{C}^\sigma \\ &= \sum_{\sigma=0}^{h} \mathfrak{C}^\sigma \left[\sum_{\varrho=\sigma}^{h} \alpha_\varrho \binom{\varrho}{\sigma} \lambda_\nu^{\varrho-\sigma} \right] \\ &= \sum_{\sigma=0}^{l-1} \frac{1}{\sigma!} f_h^{(\sigma)}(\lambda_\nu) \mathfrak{C}^\sigma , \end{aligned}$$

wobei $f_h^{(\sigma)}$ die σ-te Ableitung bedeutet.

Daher folgt schließlich

$$f(\mathfrak{A}_\nu) = \sum_{\sigma=0}^{l-1} \frac{1}{\sigma!} f^{(\sigma)}(\lambda_\nu) \mathfrak{C}^\sigma , \qquad (28,4)$$

d. h. aber es konvergiert $f(\mathfrak{A}_\nu)$ nur dann, wenn $f(\lambda_\nu)$, $f^{(1)}(\lambda_\nu) \cdots f^{(l-1)}(\lambda_\nu)$ konvergieren. Liegt λ_ν außerhalb des Konvergenzkreises von $f(\lambda)$, so divergiert $f(\lambda_\nu)$. Liegt λ_ν auf dem Konvergenzkreis, so konvergieren alle diese Ableitungen nur dann, wenn $f^{(l-1)}(\lambda_\nu)$ konvergiert.

Es soll nun noch das in Ziffer 23 behandelte Beispiel 1 nach der in Ziffer 27 entwickelten Methode nach dem SYLVESTERschen Satz erläutert werden.

B e i s p i e l. Es sei die Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{E} + \mathfrak{A} + \mathfrak{A}^2 + \cdots$$

gegeben mit
$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0.05 & -0.01 \\ -0.25 & 0.05 \end{pmatrix},$$

dann ist
$$f(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - 0.05 & 0.01 \\ 0.25 & \lambda - 0.05 \end{pmatrix},$$

$$|f(\lambda)| = \lambda^2 - 0.1\,\lambda = 0, \quad \text{d. h.} \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0.1 .$$

Damit wird nach (27,10)

$$\mathfrak{F}(\lambda_1) = \begin{pmatrix} -0.05 & -0.01 \\ -0.25 & -0.05 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{F}(\lambda_2) = \begin{pmatrix} 0.05 & -0.01 \\ -0.25 & 0.05 \end{pmatrix}$$

und
$$|f(\lambda_1)|^{(1)} = -0{,}1 , \quad |f(\lambda_2)|^{(1)} = +0.1 .$$

Nach (23,13) ist $\mathfrak{P}(\lambda_1) = 1 + \lambda_1 + \lambda_1^2 + \cdots = \frac{1}{1-\lambda_1} = 1$, $\mathfrak{P}(\lambda_2) = \frac{10}{9}$.

Damit wird nach (27,16):

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{A}) = \frac{\mathfrak{F}(\lambda_1)}{|f(\lambda_1)|^{(1)}} \mathfrak{P}(\lambda_1) + \frac{\mathfrak{F}(\lambda_2)}{|f(\lambda_2)|^{(1)}} \cdot \mathfrak{P}(\lambda_2)$$

$$= \begin{pmatrix} -0.05 & -0.01 \\ -0.25 & -0.05 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-0.1} + \begin{pmatrix} 0.05 & -0.01 \\ -0.25 & 0.05 \end{pmatrix} \frac{\frac{10}{9}}{0.1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5}{10} & \frac{1}{10} \\ 2.5 & \frac{5}{10} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{25}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{0.9} \begin{pmatrix} 0.95 & -0.01 \\ -0.25 & 0.95 \end{pmatrix},$$

d. h. das gleiche Ergebnis, wie es bereits in Ziffer 23 erhalten wurde.

IV. Transformationen von Matrizen

29. Äquivalente Matrizen

Wegen der besonderen Einfachheit der Diagonalmatrizen entsteht nunmehr die Aufgabe, beliebige Matrizen, soweit es möglich ist, durch besondere Umformungen, wie durch vordere und hintere Multiplikation auf die Diagonalgestalt zu bringen.

Es werde im Folgenden vorausgesetzt, daß stets quadratische Matrizen vorliegen sollen.

Zu den elementarsten Umformungen gehören folgende:

1. Vertauschung zweier Zeilen oder Spalten.

In Ziffer 19 wurde bereits diejenige Matrix eingeführt, die dadurch entsteht, daß in der Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ die i-te und k-te Zeile oder, was auf dasselbe hinauskommt, die i-te und k-te Spalte vertauscht werden. Sie wurde $\mathfrak{V}_{ik}$ genannt; ihre Determinante war $|\mathfrak{V}_{ik}| = -1$. Multipliziert man eine Matrix $\mathfrak{A}$ von links mit $\mathfrak{V}_{ik}$, so entsteht eine Matrix, bei der i-te und k-te Zeile von $\mathfrak{A}$ vertauscht sind; Multiplikation von rechts führt zu einer Matrix, bei der i-te und k-te Spalte von $\mathfrak{A}$ vertauscht sind.

Beispiel:

$$\mathfrak{V}_{23} \cdot \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{V}_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{pmatrix},$$

2. Addition des Vielfachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte).

Wird die Einheitsmatrix derart modifiziert, daß in der i-ten Zeile und k-ten Spalte $(i \neq k)$ ein Element w eingeführt wird, so entsteht die Matrix $\mathfrak{W}_{ik}(w)$ mit $|\mathfrak{W}_{ik}(w)| = 1$. Dann bedeutet die vordere Multiplikation einer Matrix $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{W}_{ik}(w)$, also

$\mathfrak{W}_{ik}\mathfrak{A}$, daß zur i-ten Zeile von $\mathfrak{A}$ das w-fache der k-ten Zeile von $\mathfrak{A}$ hinzuaddiert wird; hintere Multiplikation $[\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{W}_{ik}(w)]$, daß zur k-ten Spalte von $\mathfrak{A}$ das w-fache der i-ten Spalte hinzuaddiert wird.

Beispiel:

$$\mathfrak{W}_{32}(w)\,\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & w & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+wa_{21} & a_{32}+wa_{22} & a_{33}+wa_{23} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{W}_{32}(w) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & w & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}+wa_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+wa_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}+wa_{33} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

3. Multiplikation einer Zeile (Spalte) mit einer nicht verschwindenden Konstanten.

Wird in der Einheitsmatrix die 1 der i-ten Zeile durch x ersetzt, so entsteht die Matrix $\mathfrak{X}_{ii}(x)$ mit $|\mathfrak{X}_{ii}(x)| = x$. Dann bedeutet $\mathfrak{X}_{ii}(x)\cdot\mathfrak{A}$, daß in $\mathfrak{A}$ die i-te Zeile und $\mathfrak{A}\,\mathfrak{X}_{ii}(x)$, daß in $\mathfrak{A}$ die i-te Spalte mit x multipliziert wird.

Beispiel:

$$\mathfrak{X}_{33}(x)\cdot\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ xa_{31} & xa_{32} & xa_{33} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{X}_{33}(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & xa_{13} \\ a_{21} & a_{22} & xa_{23} \\ a_{31} & a_{32} & xa_{33} \end{pmatrix}.$$

Streng genommen, müßten wir die Einheitsmatrix selbst auch noch hinzunehmen. Die Anwendung der drei aufgeführten Operationen führt zu den äquivalenten Matrizen, die folgendermaßen definiert sind:

Definition 39: Zwei Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen äquivalent, wenn sie durch endlich viele elementare Umformungen ineinander übergeführt werden können, geschrieben:

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}. \tag{29,1}$$

Läßt sich $\mathfrak{A}$ durch endlich viele elementare Umformungen in $\mathfrak{B}$ überführen und $\mathfrak{B}$ seinerseits durch endlich viele Umformungen in $\mathfrak{C}$, dann läßt sich insgesamt $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{C}$ überführen, d. h. ist

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} \sim \mathfrak{C},$$

so ist auch

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{C}. \tag{29,2}$$

Man nennt diese Eigenschaft die Transitivität des Äquivalentbegriffes. Der Äquivalenzbegriff genügt zugleich den Postulaten, die an einen solchen gestellt werden müssen; es sind dies die Gesetze

$$\text{a)} \quad \mathfrak{A} \sim \mathfrak{B} \quad \text{(Reflexivität)} \tag{29,3}$$

$$\text{b) aus } \mathfrak{A} \sim \mathfrak{B} \text{ folgt } \mathfrak{B} \sim \mathfrak{A} \quad \text{(Symmetrie)} \tag{29,4}$$

Da jede elementare Umformung gleichbedeutend mit vorderer bzw. hinterer Multiplikation einer nichtsingulären Matrix ist, so folgt

Satz 82: Jede Matrix $\mathfrak{A}$, die $\mathfrak{B}$ äquivalent ist, kann durch folgende Relation ausgedrückt werden

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{S}\mathfrak{A}\mathfrak{T}, \tag{29,5}$$

wobei $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ nichtsinguläre Matrizen sind, und Produkte der Matrizen $\mathfrak{B}_{ik}$, $\mathfrak{W}_{ik}(w)$, $\mathfrak{X}_{ii}(x)$ darstellen.

Da sich durch elementare Umformungen der Rang nicht ändert, so folgt auch

Satz 83: Äquivalente Matrizen besitzen den gleichen Rang.

Es muß nun noch gezeigt werden, daß eine quadratische Matrix $\mathfrak{A}$ vom Rang r äquivalent einer Matrix $\mathfrak{C}$ ist, deren Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen sämtlich Null sind und die in der Hauptdiagonalen r Elemente enthält, also vom Typ ist

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & c_2 & & & \\ \cdot & & \ddots & & \\ \cdot & & & c_r & \\ \cdot & & & & \ddots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}; \tag{29,6}$$

denn es ist die r-reihige Determinante

$$\begin{vmatrix} c_1 & & 0 \\ \cdot & c_2 & \\ \cdot & & \ddots \\ 0 & & c_r \end{vmatrix} = c_1 c_2 \ldots c_r \neq 0,$$

während jede $(r+1)$-reihige Determinante verschwindet.

Die Diagonalform (29,6) heißt kanonische Form, Standardform oder Normalform.

Zur Diagonalform gelangt man schrittweise durch Anwendung der elementaren Operationen (1) bis (3) auf folgende Weise:

Gegeben sei die Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})$. Multiplizieren wir $\mathfrak{A}$ von links her mit dem Produkt

$$\mathfrak{W}_{21}\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)\cdot \mathfrak{W}_{31}\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)\cdots \mathfrak{W}_{n1}\left(-\frac{a_{n1}}{a_{11}}\right) = \prod_{i=2}^{n} \mathfrak{W}_{i1}\left(-\frac{a_{i2}}{a_{11}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & & \\ \vdots & & & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

und von rechts her mit dem Produkt

$$\mathfrak{W}_{12}\left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)\cdot \mathfrak{W}_{13}\left(-\frac{a_{13}}{a_{11}}\right)\cdots \mathfrak{W}_{1n}\left(-\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right) = \prod_{k=2}^{n} \mathfrak{W}_{1k}\left(-\frac{a_{1k}}{a_{11}}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & & 0 \\ \cdot & & \cdot & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

so entsteht die Matrix

$$\prod_{i=2}^{n} \mathfrak{W}_{i1}\left(-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right)\cdot \mathfrak{A}\cdot \prod_{k=2}^{n} \mathfrak{W}_{1k}\left(-\frac{a_{1k}}{a_{11}}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & & & \\ \cdot & & \mathfrak{B}_1 & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Durch elementare Umformungen vom Typ (3) kann a_{11} zu 1 reduziert werden. Die Untermatrix $\mathfrak{B}_1$ kann in gleicher Weise behandelt werden bis schließlich die Normalform entstanden ist.

Beispiel 1: $\mathfrak{A}$ ist regulär. In diesem Falle ist in $\mathfrak{B} = \mathfrak{S}\mathfrak{A}\mathfrak{T}$

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{A}^{-1},\ \mathfrak{T} = \mathfrak{E},\ \text{also } \mathfrak{B} = \mathfrak{A}^{-1}\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{E} = \mathfrak{E} = \mathfrak{C}.$$

Daß $\mathfrak{A}^{-1}$ als Produkt der elementaren Umformungen (1) bis (3) dargestellt werden kann, mag an folgendem Beispiel erläutert werden.

Es sei
$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

dann ist
$$\mathfrak{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

d. h. $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{E} = \mathfrak{E} = \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, also die Normalform.

$\mathfrak{E}$ selbst ist ein Spezialfall der Umformungen (2) bzw. (3):

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{X}_{ii}(1) = \mathfrak{W}_{ik}(0).$$

$\mathfrak{A}^{-1}$ wird nun z. B. folgendermaßen gewonnen:

Man geht aus von $\mathfrak{X}_{22}(1/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$; Multiplikation von rechts mit $\mathfrak{W}_{12}(-3/2) = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ liefert $\mathfrak{X}_{22}(1/2)\cdot\mathfrak{W}_{12}(-3/2) = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$,

weitere linke Multiplikation mit $\mathfrak{W}_{21}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ergibt

$$\mathfrak{W}_{21}(-1)\cdot\mathfrak{X}_{22}(1/2)\cdot\mathfrak{W}_{12}(-3/2) = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

nochmalige linke Multiplikation mit $\mathfrak{X}_{11}(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ liefert

$$\mathfrak{X}_{11}(2)\cdot\mathfrak{W}_{21}(1)\ \mathfrak{X}_{22}(1/2)\cdot\mathfrak{W}_{12}(-1) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

wird schließlich noch von links her mit $\mathfrak{X}_{22}(1/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ multipliziert, so folgt

$$\mathfrak{X}_{22}(1/2)\cdot\mathfrak{X}_{11}(2)\cdot\mathfrak{W}_{21}(-1)\cdot\mathfrak{X}_{22}(1/2)\,\mathfrak{W}_{12}(-1) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{A}^{-1}.$$

Beispiel 2: $\mathfrak{A}$ sei singulär vom Rang 2.

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix},\ r(\mathfrak{A}) = 2,\ |\mathfrak{A}| = 0.$$

Dann ist

$$\mathfrak{W}_{21}(-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathfrak{W}_{31}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{W}_{21}(-2)\cdot\mathfrak{W}_{31}(-3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und

$$\mathfrak{W}_{12}(-2) = \begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \mathfrak{W}_{13}(-9) = \begin{pmatrix}1&0&-9\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ \mathfrak{W}_{12}(-2)\cdot\mathfrak{W}_{13}(-9) = \begin{pmatrix}1&-2&-9\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Damit wird

$$\mathfrak{W}_{21}(-2)\cdot\mathfrak{W}_{31}(-3)\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{W}_{12}(-2)\cdot\mathfrak{W}_{13}(-9) = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-4&-16\\0&-8&-32\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\quad 0\\0& \\0&\mathfrak{B}_1\end{pmatrix}.$$

Es muß nun noch die zweireihige Untermatrix $\mathfrak{B}_1 = \begin{pmatrix}-4&-16\\-8&-32\end{pmatrix}$ transformiert werden.

Zunächst wird links mit $\mathfrak{X}_{11}(-1/4)$ multipliziert:

$$\begin{pmatrix}-1/4&0\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4&-16\\-8&-32\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&4\\-8&-32\end{pmatrix} = \mathfrak{B}'.$$

Weiter ist

$$\mathfrak{W}'_{21}(+8) = \begin{pmatrix}1&0\\8&1\end{pmatrix},\ \mathfrak{W}'_{21}(8)\cdot\mathfrak{B}' = \begin{pmatrix}1&4\\0&0\end{pmatrix}$$

und

$$\mathfrak{W}'_{12}(-4) = \begin{pmatrix}1&-4\\0&1\end{pmatrix},\ \mathfrak{W}'_{21}(8)\cdot\mathfrak{B}'\cdot\mathfrak{W}_{12}(-4) = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Werden alle zweireihigen Matrizen mit $\begin{pmatrix}1&0\;0\\0& \\0& \end{pmatrix}$ geändert, so folgt als Endergebnis

$$\mathfrak{W}'_{21}(8)\cdot\mathfrak{X}'_{11}(-\tfrac{1}{4})\cdot\mathfrak{W}_{21}(-2)\cdot\mathfrak{W}_{31}(-3)\cdot\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{W}_{12}(-2)\cdot\mathfrak{W}_{13}(-9)\cdot\mathfrak{W}'_{12}(-4)$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&8&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\tfrac{1}{4}&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-3&0&1\end{pmatrix}$$

$$\cdot\,\mathfrak{A}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&-9\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1&0&0\\\tfrac{1}{2}&-\tfrac{1}{4}&0\\1&-2&1\end{pmatrix}\cdot\mathfrak{A}\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Es ist noch die Äquivalenz von Polynommatrizen, insbesondere λ-Matrizen zu untersuchen (vgl. Definition 38). Auch hier haben wir es wieder mit elementaren Umformungen zu tun, und zwar

1. Vertauschung zweier Zeilen oder zweier Spalten,
2. Addition der mit ein und demselben Polynom in λ multiplizierten Elemente einer Zeile (Spalte) zu den entsprechenden Elementen einer anderen Zeile (Spalte),
3. Multiplikationen aller Elemente einer Zeile (Spalte) mit ein und demselben nicht verschwindenden konstanten Faktor.

Definition 39 bleibt auch hier in Gültigkeit, ebenso Satz 83 über die Rangerhaltung. Es gibt aber noch weitere Größen, die bei elementaren Umformungen invariant bleiben.

Zunächst besteht folgender Satz:

Satz 84: Besitzen alle i-reihigen Determinanten der λ-Matrix $f(\lambda)$ das Polynom $\varphi(\lambda)$ als Faktor, so haben alle i-reihigen Determinanten jeder aus $f(\lambda)$ durch eine elementare Umformung hervorgehenden Matrix diesen Faktor.

Liegt eine elementare Umformung vom Typ (1) oder (3) vor, so ist der Satz ohne weiteres klar, da diese Umformungen die i-reihigen Determinanten nur mit einem konstanten Faktor multiplizieren. Der Beweis für die Umformung (2) ergibt sich folgendermaßen:

Angenommen, es werde zu den Elementen der p-ten Spalte von $f(\lambda)$ die mit dem Polynom $\psi(\lambda)$ multiplizierten entsprechenden Elemente der q-ten Spalte addiert. Dann bleibt jede i-reihige Determinante von $f(\lambda)$, in der die p-te Spalte nicht vorkommt, wie auch jede, die sowohl die p-te als auch die q-te Spalte enthält, ungeändert. Sind nun A und B n-reihige Determinanten von $f(\lambda)$, so gehen die i-reihigen Determinanten, die die p-te, nicht aber die q-te Spalte enthalten, bei der Umformung in die Form $A \pm \psi(\lambda) \cdot B$ über, d. h. auch hier ist der Satz gültig.

Sodann gilt

Satz 85: Ist r der gemeinsame Rang der äquivalenten Matrizen $f(\lambda)$ und $\mathfrak{g}(\lambda)$ und ist $i \leqq r$, so ist der größte gemeinsame Teiler $D_i(\lambda)$ der i-reihigen Determinanten von $f(\lambda)$ auch größter gemeinsamer Teiler der i-reihigen Determinanten von $\mathfrak{g}(\lambda)$.

Beweis: Nach Satz 84 ist $D_i(\lambda)$ Faktor aller i-reihigen Determinanten von $\mathfrak{g}(\lambda)$. Hätten diese noch einen Faktor höheren Grades, so müßte dieser, entgegen der Voraussetzung, auch noch Faktor aller i-reihigen Determinanten sein.

Damit folgt, daß die größten gemeinsamen Teiler $D_1(\lambda) \ldots D_r(\lambda)$ gegenüber allen Transformationen, die aus den elementaren Umformungen gebildet werden, Invarianten sind; mit dem Rang r bilden sie ein vollständiges Invariantensystem.

Es besteht nun weiterhin folgender Satz:

Satz 86: Ist das Element $f_{11}(\lambda)$ einer λ-Matrix ungleich Null und kein Faktor aller übrigen Elemente, so läßt sich eine äquivalente Matrix angeben, deren erstes Element nicht identisch verschwindet und von geringerem Grade ist als $f_{11}(\lambda)$.

Es werde zunächst angenommen, daß in der ersten Zeile in der j-ten Spalte ein nicht durch $f_{11}(\lambda)$ teilbares Element $f_1(\lambda)$ stehe. Der Quotient $f_1(\lambda)$ durch $f_{11}(\lambda)$ sei $q(\lambda)$, der Rest $r(\lambda)$, also

$$f_1(\lambda) = f_{11}(\lambda) \cdot q(\lambda) + r(\lambda). \tag{29,7}$$

Addiert man also zu den Elementen der j-ten Spalte die mit $-q(\lambda)$ multiplizierten entsprechenden Elemente der ersten Spalte, so ergibt sich eine äquivalente Matrix, in der das erste Element der j-ten Spalte $r(\lambda)$ ist, also von geringerem Grad ist als $f_{11}(\lambda)$. Eine Vertauschung der ersten und der j-ten Spalte führt nunmehr zur Aussage des Satzes.

Nun sei durch $f_{11}(\lambda)$ jedes Element der ersten Zeile und der ersten Spalte teilbar, aber nicht das Element $f_1(\lambda)$. Das Element in der ersten Zeile und der j-ten Spalte sei $\psi(\lambda) \cdot f_{11}(\lambda)$. Durch Addition der mit $-\psi(\lambda)$ multiplizierten Elemente der ersten Spalte zu den Elementen der j-ten Spalte erhält man eine äquivalente Matrix, in der das erste Element noch $f_{11}(\lambda)$ und das erste Element der j-ten Spalte gleich Null ist. Das erste Element der i-ten Zeile ist unverändert geblieben und ist daher durch $f_{11}(\lambda)$ teilbar; dagegen ist das Element $f_1(\lambda)$ auch jetzt noch nicht durch

$f_{11}(\lambda)$ teilbar. Addiert man nun zu den Elementen der ersten Spalte die entsprechenden der j-ten Spalte, so entsteht eine neue äquivalente Matrix bei der das erste Element noch immer $f_{11}(\lambda)$ ist, das erste Element der i-ten Zeile aber nicht durch $f_{11}(\lambda)$ teilbar ist. Diese Matrix fällt daher unter den behandelten Fall, wo ein Element in der ersten Spalte nicht durch $f_{11}(\lambda)$ teilbar war. Der Satz ist somit vollständig bewiesen.

Satz 87: Eine λ-Matrix, deren Elemente nicht sämtlich verschwinden, kann stets in eine äquivalente Matrix mit folgenden Eigenschaften umgeformt werden:

a) das erste Element $f_{11}(\lambda)$ verschwindet nicht identisch,
b) alle übrigen Elemente der ersten Zeile und der ersten Spalte sind identisch Null,
c) die noch verbleibenden Elemente sind sämtlich durch $f_{11}(\lambda)$ teilbar.

Durch geeignete Umstellung von Zeilen und Spalten kann man an die erste Stelle ein nicht identisch verschwindendes Element bringen. Ist dieses kein gemeinsamer Faktor aller übrigen Elemente, so läßt sich nach Satz 86 eine äquivalente Matrix angeben, deren erstes Element nicht verschwindet und von geringerem Grad ist. Ist auch dieses Element nicht ein gemeinsamer Faktor aller übrigen, so wird das Verfahren wiederholt. Jedesmal wird dabei der Grad des ersten Elementes erniedrigt; das Verfahren muß also einmal aufhören, d. h. das erste Element wird dann gemeinsamer Faktor aller übrigen. Durch geeignete Umformungen von Typ (2) lassen sich dann alle Elemente der ersten Zeile und der ersten Spalte außer dem ersten auf Null reduzieren; die übrigen Elemente sind dann aber sämtlich durch dies erste teilbar.

Da $f_{11}(\lambda)$ ein Teiler aller übrigen Elemente der vereinfachten Matrix ist, muß $f_{11}(\lambda)$ nach Satz 85 der größte gemeinsame Teiler aller Elemente der ursprünglichen Matrix sein.

Ist also die Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})_{(n,n)}$ vom Rang $r > 0$ gegeben, so kann sie durch geeignete Umformungen auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} f_1(\lambda) & 0 & & 0 \\ 0 & b_{11} & & b_{1,n-1} \\ \vdots & & & \\ 0 & b_{n-1,1} & \dots & b_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \tag{29,8}$$

gebracht werden, wo $f_1(\lambda) \neq 0$ ein Teiler aller b ist. Da die Matrix (29,8) notwendig den Rang r besitzt, so hat die Matrix $(n-1)$ter-Ordnung

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n-1,1} & \dots & b_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \tag{29,9}$$

den Rang $(r-1)$. Ist aber $r > 1$, so kann die Matrix (29,9) durch elementare Umformungen auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} f_2(\lambda) & 0 & & 0 \\ 0 & c_{11} & & c_{1,n-2} \\ \vdots & & & \\ 0 & c_{n-2,1} & \dots & c_{n-2,n-2} \end{pmatrix} \tag{29,10}$$

gebracht werden, wobei $f_2(\lambda) \neq 0$ ein Teiler sämtlicher c ist. Nach Satz 85 ist $f_2(\lambda)$ als größter gemeinsamer Teiler aller Elemente der Matrix (29,10) auch größter gemeinsamer Teiler aller b und daher durch $f_1(\lambda)$ teilbar. Die Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ ist damit durch eine Aufeinanderfolge elementarer Umformungen auf die Gestalt gebracht:

$$\begin{pmatrix} f_1(\lambda) & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & c_{11} & & c_{1,n-2} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & c_{n-2,1} & \cdots & c_{n-2,n-2} \end{pmatrix}, \tag{29,11}$$

wo weder $f_1(\lambda)$ noch $f_2(\lambda)$ identisch verschwinden, und $f_1(\lambda)$ ein Teiler von $f_2(\lambda)$ und $f_2(\lambda)$ ein Teiler sämtlicher c ist.

Ist $r > 2$, so kann die $(n-2)$-reihige Matrix c weiter umgestaltet werden, so daß schließlich entsteht:

$$\begin{pmatrix} f_1(\lambda) & 0 & 0 \ldots & 0 \ldots 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & 0 \ldots & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & f_3(\lambda) \ldots & 0 \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 \ldots & f_r(\lambda) \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \ldots 0 \end{pmatrix}. \tag{29,12}$$

Durch elementare Umformungen vom Typ (3) läßt sich die Matrix noch in der Weise vereinfachen, daß der Koeffizient der höchsten Potenz von λ in jedem Polynom $f_i(\lambda)$ zu Eins gemacht wird.

Damit folgt der

S a t z 88: Jede λ-Matrix n-ter Ordnung vom Rang r kann vermöge elementarer Umformungen auf die Normalform gebracht werden

$$\begin{pmatrix} E_1(\lambda) & 0 & 0 \ldots & 0 \ldots 0 \\ 0 & E_2(\lambda) & 0 \ldots & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & E_3(\lambda) \ldots & 0 \ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 \ldots & E_r(\lambda) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \ldots 0 \end{pmatrix}, \tag{29,13}$$

wo in jedem Polynom $E_i(\lambda)$ der Koeffizient der höchsten Potenz von λ gleich Eins ist und $E_i(\lambda)$ ein Faktor von $E_{i+1}(\lambda)$ ist $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$.

Schließlich gilt

S a t z 89: Der größte gemeinsame Teiler der i-reihigen Determinanten einer λ-Matrix vom Rang r $(i \leq r)$ ist

$$D_i(\lambda) = E_1(\lambda) \cdot E_2(\lambda) \cdots E_i(\lambda), \tag{29,14}$$

wenn $E_i(\lambda)$ die Elemente der Normalform (29,13) bedeuten.

Satz 90: Zwei λ-Matrizen n-ter Ordnung sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie denselben Rang r besitzen und wenn für jeden Wert $i = 1, 2, \ldots r$ die i-reihigen Determinanten der einen Matrix denselben größten gemeinsamen Teiler besitzen wie die i-reihigen Determinanten der anderen Matrix.

Der Satz ist eine Folge der Sätze 85 und 89.

Anstatt als Invarianten die größten gemeinsamen Teiler einzuführen, können auch die invarianten Faktoren eingeführt werden.

Aus Satz 89 folgt

Satz 91: Der größte gemeinsame Teiler der i-reihigen Determinanten ($i = 2, 3, \ldots r$) einer λ-Matrix vom Rang r ist durch den größten gemeinsamen Teiler der $(i-1)$-reihigen Determinanten teilbar.

Die invarianten Faktoren sind nun folgendermaßen definiert:

Definition 40: Wird in der λ-Matrix $f(\lambda)$ vom Rang r der größte gemeinsame Teiler der i-reihigen Determinanten mit

$$D_i(\lambda) \qquad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

bezeichnet, wobei der Koeffizient der höchsten Potenz von λ gleich Eins sein soll und

$$D_0(\lambda) = 1$$

bedeutet, so heißt das Polynom

$$E_i(\lambda) = \frac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)} \tag{20,15}$$

der i-te invariante Faktor von $f(\lambda)$.

Mit dem Rang r bestimmen die $E_i(\lambda)$ daher ein vollständiges Invariantensystem:

Satz 92: Zwei λ-Matrizen gleicher Ordnung sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie denselben Rang besitzen und die invarianten Faktoren der einen mit den entsprechenden der anderen Matrix übereinstimmen.

Da sich im Falle einer nichtsingulären Matrix $D_i(\lambda)$ von der Determinante der Matrix nur durch einen konstanten Faktor unterscheidet, folgt, daß, abgesehen von einem konstanten nicht verschwindenden Faktor, die Determinante mit dem Produkt aller invarianten Faktoren übereinstimmt. Wegen Satz 89 sind die invarianten Faktoren genau die Polynome $E_i(\lambda)$ der Normalform (29,13). Nun ist in jeder Normalform jedes E ein Teiler des folgenden; also ergibt sich

Satz 93: Von den aufeinanderfolgenden invarianten Faktoren $E_i(\lambda)$ einer λ-Matrix vom Rang r ist jeder ein Teiler aller folgenden. Im Gegensatz zu den invarianten Faktoren und den Größen D, die rationale Invarianten sind, sind die Elementarteiler im allgemeinen irrationale Invarianten.

Um sie zu definieren, müssen zunächst die linearen Faktoren definiert werden.

Definition 41: Bedeutet $D_r(\lambda)$ den größten gemeinsamen Teiler der r-reihigen Determinanten der λ-Matrix $f(\lambda)$ vom Rang r, so heißen die linearen Faktoren

$$\lambda - \alpha, \ \lambda - \alpha', \ \lambda - \alpha'', \ \ldots \tag{29,16}$$

von $D_r(\lambda)$ auch die linearen Faktoren der Matrix $f(\lambda)$ ($\alpha, \alpha', \alpha''$ sind Konstante). Da aber $D_r(\lambda)$ das Produkt aller invarianten Faktoren von $f(\lambda)$ ist, so ist jeder invariante Faktor ein Produkt gewisser Potenzen von Linearfaktoren von $f(\lambda)$, deren Exponenten Null oder ganze positive Zahlen sind.

Daher wird definiert

Definition 42: Bezeichnet man mit

$$E_i(\lambda) = (\lambda - \alpha)^{e_i}, \quad (\lambda - \alpha')^{e'_i} \dots \quad (i = 1, \dots, r) \tag{29,17}$$

die invarianten Faktoren der λ-Matrix $f(\lambda)$ vom Rang r, deren voneinander verschiedene Linearfaktoren

$$\lambda - \alpha, \lambda - \alpha', \lambda - \alpha'', \dots$$

sind, so heißen von den Größen

$$\begin{matrix} (\lambda-\alpha)^{e_1}, & (\lambda-\alpha)^{e_2}, & \dots, & (\lambda-\alpha)^{e_r} \\ (\lambda-\alpha')^{e'_1}, & (\lambda-\alpha')^{e'_2}, & \dots, & (\lambda-\alpha')^{e'_r} \\ (\lambda-\alpha'')^{e''_1}, & (\lambda-\alpha'')^{e''_2}, & \dots, & (\lambda-\alpha'')^{e''_r} \\ \vdots & & & \vdots \end{matrix} \tag{29,18}$$

diejenigen, die sich nicht auf eine Konstante reduzieren, die Elementarteiler der Matrix $f(\lambda)$; man sagt, jeder Elementarteiler entspreche dem linearen Faktor, von dem er eine Potenz ist.

Die invarianten Faktoren bestimmen die Elementarverteiler völlig; sie sind nicht nur Invarianten, sondern bilden mit dem Rang r zusammen ein vollständiges Invariantensystem.

Satz 94: Zwei λ-Matrizen sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie denselben Rang besitzen und die Elementarteiler der einen mit den entsprechenden Elementarteilern der anderen identisch sind.

Aus Satz 93 folgt

Satz 95: Die Gradzahlen e_i der Elementarteiler, die einem bestimmten Linearfaktor entsprechen, genügen den Ungleichungen

$$e_i \geqq e_{i-1} \quad (i = 2, 3, \dots, r). \tag{29,19}$$

Für die Berechnung der Elementarteiler sind folgende Sätze von Bedeutung:

Satz 96: Verschwinden in einer λ-Matrix alle Elemente, die außerhalb der Hauptdiagonale stehen, und wird jedes Element der Hauptdiagonale, das nicht konstant ist, als Faktor von Potenzen verschiedener Linearfaktoren $\lambda - \alpha$, $\lambda - \alpha'$, ... mit einer Konstanten dargestellt, so sind diese Potenzen gerade die Elementarverteiler der Matrix.

Satz 97: Verschwinden alle Elemente einer λ-Matrix außer denen, die in einer gewissen Anzahl nicht sich überdeckender Hauptunterdeterminanten liegen, so findet man die Elementarteiler der Matrix, wenn man die aller dieser Hauptunterdeterminanten aufsucht.

Gemäß (29,5) kann die Äquivalenz zweier λ-Matrizen auch in folgender Weise definiert werden.

Definition 43: Zwei n-reihige λ-Matrizen $f(\lambda)$ und $\mathfrak{g}(\lambda)$ heißen äquivalent, wenn zwei nichtsinguläre n-reihige λ-Matrizen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gefunden werden können, deren Determinanten von λ unabhängig sind, und für die die Relation gilt

$$\mathfrak{g}(\lambda) = \mathfrak{P}(\lambda) \cdot f(\lambda) \cdot \mathfrak{Q}(\lambda). \tag{29,20}$$

N.B. Zunächst ist nur bewiesen, daß eine Äquivalenz nach Definition 39 auch eine solche nach Definition 43 ist. Tatsächlich decken sich aber die Äquivalenz-

begriffe der beiden Definitionen völlig. Man sieht, daß die drei Eigenschaften, die an den Äquivalenzbegriff gestellt werden (Transitivität, Reflexivität, Symmetrie) erfüllt sind. Es ist sodann nur noch zu zeigen, daß $\mathfrak{P}(\lambda)$ und $\mathfrak{Q}(\lambda)$ sich als Produkte der elementaren Umformungen darstellen lassen. Das ist aber immer möglich, da $\mathfrak{P}(\lambda)$ und $\mathfrak{Q}(\lambda)$ nach Voraussetzung nicht singuläre λ-Matrizen sein sollen, deren Determinante von λ unabhängig ist, also konstant ist. Es ist lediglich zu beachten, daß in der dritten elementaren Umformung das x unabhängig von λ sein muß. Das ist aber keine Einschränkung des Äquivalenzbegriffes. Es ist also auch eine Äquivalenz nach Definition 43 zugleich eine solche nach Definition 39.

Da nach Voraussetzung die Determinanten der Matrizen $\mathfrak{P}(\lambda)$ und $\mathfrak{Q}(\lambda)$ Konstante sind, sind die reziproken Matrizen $\mathfrak{P}^{-1}(\lambda)$ und $\mathfrak{Q}^{-1}(\lambda)$ ebenfalls λ-Matrizen, d. h. ihre Elemente sind nicht gebrochene rationale Funktionen von λ, wie es im allgemeinen bei den Reziproken der λ-Matrizen der Fall ist. (29,20) kann daher auch geschrieben werden:

$$\mathfrak{f}(\lambda) = \mathfrak{P}^{-1}(\lambda) \cdot \mathfrak{g}(\lambda) \cdot \mathfrak{Q}^{-1}(\lambda), \tag{29,21}$$

d. h. die Beziehung zwischen den Matrizen $\mathfrak{P}(\lambda)$ und $\mathfrak{Q}(\lambda)$ ist reziprok, wie es auch sein muß.

Beispiel 3: Gegeben sei die λ-Matrix

$$\mathfrak{f}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda^3-\lambda^2 \\ \lambda^3 & -\lambda^2 & \lambda^4-\lambda \end{pmatrix}.$$

Die größten gemeinsamen Teiler sind

$$\begin{aligned} D_0(\lambda) &= 1, \\ D_1(\lambda) &= \lambda, \\ D_2(\lambda) &= \lambda^2(\lambda-1), \\ D_3(\lambda) &= \lambda^6-\lambda^5-\lambda^4+\lambda^3. \end{aligned}$$

Damit folgt für die invarianten Faktoren

$$\begin{aligned} E_1(\lambda) &= \frac{D_1(\lambda)}{D_0(\lambda)} = \lambda, \\ E_2(\lambda) &= \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)} = \lambda(\lambda-1), \\ E_3(\lambda) &= \frac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)} = \lambda(\lambda^2-1). \end{aligned}$$

Also besteht folgende Gleichung

$$\mathfrak{g}(\lambda) = \mathfrak{P}(\lambda) \cdot \mathfrak{f}(\lambda) \cdot \mathfrak{Q}(\lambda)$$

$$\text{oder} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda^2-1) \end{pmatrix} = \mathfrak{P}(\lambda) \cdot \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda^2-\lambda & \lambda^3-\lambda^2 \\ \lambda^3 & -\lambda^2 & \lambda^4-\lambda \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{Q}(\lambda).$$

Die Bestimmung von $\mathfrak{P}(\lambda)$ und $\mathfrak{Q}(\lambda)$ geschieht nach dem oben angegebenen Verfahren wie folgt:

Linke Multiplikation von $f(\lambda)$ mit $\mathfrak{W}_{31}(-\lambda^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\lambda^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

und rechte Multiplikation mit $\mathfrak{W}_{12}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ergibt die Matrix $\mathfrak{W}_{31}(-\lambda^2)\, f(\lambda) \cdot \mathfrak{W}_{12}(1) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & \lambda^3-\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3-\lambda^2 & \lambda^4-\lambda \end{pmatrix}.$

Es muß nun noch die Untermatrix

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1) & \lambda^3-\lambda^2 \\ \lambda^3-\lambda^2 & \lambda^4-\lambda \end{pmatrix}$$

auf die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1) & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda^2-1) \end{pmatrix}$$

gebracht werden.

Wird $\mathfrak{B}$ links mit $\mathfrak{W}'_{21}(-\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{pmatrix}$ und rechts mit $\mathfrak{W}'_{12}(-\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ multipliziert, so entsteht die gewünschte Matrix, d. h. es ist

$$\mathfrak{P}(\lambda) = \mathfrak{W}'_{21}(-\lambda) \cdot \mathfrak{W}_{31}(-\lambda^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\lambda^2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\lambda^2 & -\lambda & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\mathfrak{Q}(\lambda) = \mathfrak{W}_{12}(1) \cdot \mathfrak{W}'_{12}(-\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $|\mathfrak{P}(\lambda)| = 1$, $|\mathfrak{Q}(\lambda)| = 1$.

Es ist damit $\mathfrak{g}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda^2-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\lambda^2 & -\lambda & 1 \end{pmatrix} \cdot f(\lambda) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

oder auch

$$f(\lambda) = \mathfrak{P}^{-1}(\lambda) \cdot \mathfrak{g}(\lambda) \cdot \mathfrak{Q}^{-1}(\lambda)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda^2 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{g}(\lambda) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach (29,17) wird für die linearen Faktoren und Elementarteiler

$$E_1(\lambda) = (\lambda-\alpha)\, e_1 \cdot (\lambda-\alpha')\, e'_1 \cdot (\lambda-\alpha'')\, e''_1 = \lambda \cdot 1 \cdot 1,$$
$$E_2(\lambda) = (\lambda-\alpha)\, e_2 \cdot (\lambda-\alpha')\, e'_2 \cdot (\lambda-\alpha'')\, e''_2 = \lambda(\lambda-1) \cdot 1,$$
$$E_3(\lambda) = (\lambda-\alpha)\, e_3 \cdot (\lambda-\alpha')\, e'_3 \cdot (\lambda-\alpha'')\, e''_3 = \lambda(\lambda^2-1) = \lambda(\lambda-1)(\lambda+1)$$

d. h. es sind die linearen Faktoren wegen

$$\alpha = 0,\ \alpha' = 1,\ \alpha'' = 1;\ \lambda-\alpha = \lambda,\ \lambda-\alpha' = \lambda-1,\ \lambda-\alpha'' = \lambda+1.$$

Weiterhin ist
$$e_1 = 1\,,\quad e'_1 = 0\,,\quad e''_1 = 0\,,$$
$$e_2 = 1\,,\quad e'_2 = 1\,,\quad e''_2 = 0\,,$$
$$e_3 = 1\,,\quad e'_3 = 1\,,\quad e''_3 = 1\,,$$
womit die Elementarteiler bestimmt sind.

Es soll nun noch die Äquivalenz von Matrizenpaaren genannt werden. Liegen Polynome in λ vor, so heißen zwei Paare von Matrizen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ dann äquivalent, wenn zwei nichtsinguläre Matrizen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ existieren, so daß
$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{P}\,\mathfrak{B}_1\,\mathfrak{Q}\,,\quad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{P}\,\mathfrak{B}_2\,\mathfrak{Q}\,. \tag{29,22}$$

Es gilt nun folgender

Satz 98: Sind $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ nichtsingulär, dann sind die Matrizenpaare $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ dann und nur dann äquivalent, wenn die Matrizen $\mathfrak{A}_1\lambda + \mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_1\lambda + \mathfrak{B}_2$ dieselben invarianten Faktoren (oder Elementarteiler) besitzen.

Ist $\mathfrak{A}_1\lambda + \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}_1\lambda + \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}$, so ist wegen (29,22) $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{Q}$, d. h. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ haben dieselben invarianten Faktoren.

30. Ähnliche Matrizen

Durch (29,5) wurde die äquivalente Matrix $\mathfrak{B} = \mathfrak{S}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{T}$ eingeführt; dabei waren $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ zwei quadratische, nichtsinguläre Matrizen gleicher Ordnung wie $\mathfrak{B}$, die eine Reziproke besitzen und als Produkt der elementaren Umformungen darstellbar waren. (29,5) kann nun in der Weise spezialisiert werden, daß $\mathfrak{S}$ gleich $\mathfrak{T}^{-1}$ bzw. $\mathfrak{T}$ gleich $\mathfrak{S}^{-1}$ gesetzt wird. Die so entstehenden Matrizen sollen ähnliche Matrizen heißen (in Anlehnung an die noch zu besprechende Ähnlichkeitstransformation des n-dimensionalen Vektorraumes). Es wird daher definiert

Definition 44: Zwei Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen ähnlich, wenn eine nichtsinguläre Matrix $\mathfrak{S}$ existiert, so daß
$$\mathfrak{B} = \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{A}\,\mathfrak{S} \tag{30,1}$$
ist. Umgekehrt folgt aus (30,1)
$$\mathfrak{A} = \mathfrak{S}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{S}^{-1}. \tag{30,2}$$

Summe und Produkt ähnlicher Matrizen sind ebenfalls ähnlich.

Satz 99: Ist $\quad\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{S}\quad$ und $\quad\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{S}\,,$

so ist
$$\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{S} + \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{-1}(\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2)\,\mathfrak{S} \tag{30,3}$$
und
$$\mathfrak{B}_1\cdot\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{S}\cdot\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{S}\,. \tag{30,4}$$
Für die Reziproke gilt
$$\mathfrak{B}^{-1} = (\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{A}\,\mathfrak{S})^{-1} = \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{S}\,. \tag{30,5}$$

Ist $f(\mathfrak{A})$ ein Polynom, so ist
$$\mathfrak{S}^{-1}f(\mathfrak{A})\,\mathfrak{S} = f(\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{A}\,\mathfrak{S})\,, \tag{30,6}$$
d. h. also: Summe, Produkt, Reziproke und Polynom transformieren sich kongredient zu den Matrizen selbst.

Die Transformation, die zu ähnlichen Matrizen führt, nennen wir Ähnlichkeitstransformation.

Es sollen nun die Invarianten der Transformation untersucht werden.
Für die Determinante und die Spur gilt

Satz 100:
$$|\mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}| \tag{30,7}$$
$$Sp\,(\mathfrak{B}) = Sp\,(\mathfrak{A})\,; \tag{30,8}$$

denn es ist wegen $\mathfrak{B} = \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{A}\,\mathfrak{S}$:
$$|\mathfrak{B}| = |\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{S}| = |\mathfrak{S}^{-1}|\cdot|\mathfrak{A}|\cdot|\mathfrak{S}| = |\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{S}|\cdot|\mathfrak{A}| = |\mathfrak{A}|$$

und mit Rücksicht auf Satz 47
$$Sp\,(\mathfrak{B}) = Sp\,(\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{A}\,\mathfrak{S}) = Sp\,(\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{S}\,\mathfrak{A}) = Sp\,(\mathfrak{A})$$

(vgl. auch (11,6)).

Weitere Invarianten liefert das charakteristische Polynom. Nach (26,1) und (26,3) ist
$$|\mathfrak{A}-\lambda\,\mathfrak{E}| = \lambda^n - t_1\,\lambda^{n-1} + t_2\,\lambda^{n-2} \mp \cdots \pm t_n = 0\,.$$

Dabei war $t_1 = \Sigma\, a_{ii}$ die Spur der Matrix $\mathfrak{A}$, t_n die Determinante $|\mathfrak{A}|$.

Es gilt nun folgender

Satz 101: Die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung einer Matrix sind Ähnlichkeitsinvarianten.

Der Satz stellt mithin eine Erweiterung von Satz 100 dar.

Wegen
$$\mathfrak{B} = \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{S} \text{ ist } \mathfrak{B}-\lambda\,\mathfrak{E} = \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{S}-\lambda\,\mathfrak{E} = \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{S}-\mathfrak{S}^{-1}\lambda\,\mathfrak{E}\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{-1}(\mathfrak{A}-\lambda\,\mathfrak{E})\,\mathfrak{S},$$

daher auch
$$|\mathfrak{B}-\lambda\,\mathfrak{E}| = |\mathfrak{S}^{-1}(\mathfrak{A}-\lambda\,\mathfrak{E})\,\mathfrak{S}| = |\mathfrak{A}-\lambda\,\mathfrak{E}|\,. \tag{30,9}$$

Daraus folgt aber

Satz 102: Die Eigenwerte einer Matrix sind Invarianten gegenüber Ähnlichkeitstransformationen.

Denn nach (30,9) stimmen die n Wurzeln der Säkulargleichung $|\mathfrak{B}-\lambda\,\mathfrak{E}| = 0$ mit den n Wurzeln der Säkulargleichung $|\mathfrak{A}-\lambda\,\mathfrak{E}| = 0$ überein.

Genau so, wie es möglich war, für äquivalente Matrizen eine Diagonalmatrix als Normalform anzugeben, so ist das auch für ähnliche Matrizen möglich. Sollen also die beiden ähnlichen Matrizen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ durch eine Ähnlichkeitstransformation $\mathfrak{B} = \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{A}\,\mathfrak{S}$ so transformiert werden, daß $\mathfrak{B} = (\lambda_i\,\delta_{ik})$ eine Diagonalmatrix wird, wobei die λ_i die Eigenwerte sowohl von $\mathfrak{A}$ als auch von $\mathfrak{B}$ sind, so sind an die Matrix $\mathfrak{S}$ besondere Forderungen zu stellen. Eine ausführliche Behandlung dieser Frage wird unten im Zusammenhang mit den Eigenvektoren (vgl. insbesondere Satz 108) gegeben. Desgleichen wird auf diese Fragen noch bei der Behandlung der unitären und orthogonalen Transformation eingegangen.

Wir setzen daher jetzt voraus:

1. $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind vertauschbare Matrizen.
2. Die Säkulargleichung besitze nur einfache Nullstellen, da wir zum Beweis den Satz 72d (25,9) heranziehen wollen und dieser nur für einfache Nullstellen gültig ist. Es sei hier angemerkt, daß im Falle der Entartung (mehrfache Nullstellen) das Verfahren der Störungsrechnung Anwendung finden muß (vgl. Teil III).

3. $\mathfrak{S}$ sei eine nichtsinguläre Matrix und besitze eine Reziproke. Ihre Festlegung nach Satz 72d schließt bereits den Begriff Eigenvektor ein. Es wird in Satz 108 bewiesen, daß die Spalten der Matrix $\mathfrak{S}$ die Eigenvektoren sind.

Dann gilt folgender

Satz 103: Wird $\mathfrak{A}$ durch eine geeignete Matrix $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{B} = \mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{S}$ transformiert und sind λ_i die Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{A}$, so hat $\mathfrak{B}$ die Form

$$\mathfrak{B} = (\lambda_i\, \delta_{ik}). \tag{30,10}$$

$\mathfrak{B}$ ist also eine Diagonalmatrix; die Diagonalelemente sind die Eigenwerte der Matrix.

In (30,10) ist zugleich enthalten, daß wegen (30,7) $|\mathfrak{B}| = |\mathfrak{A}| = \prod_i \lambda_i$ und wegen (30,8) $Sp\,(\mathfrak{B}) = Sp\,(\mathfrak{A}) = \sum_i \lambda_i$ ist.

Der Beweis von Satz 103 ergibt sich folgendermaßen:

Für eine Wurzel λ_i $(1 \leq i \leq n)$ ist

$$(\mathfrak{A} - \lambda_i \mathfrak{E}) = f(\lambda_i).$$

Bedeutet $\mathfrak{F}(\lambda_i)$ die zu $f(\lambda_i)$ gehörige Adjunktenmatrix, so läßt sich nach Satz 72d (25,9) $\mathfrak{F}(\lambda_i)$ als Produkt einer Spaltenmatrix $\mathfrak{s}$ und einer Reihenmatrix $\mathfrak{r}$ darstellen:

$$\mathfrak{F}(\lambda_i) = \begin{pmatrix} s_{1i} \\ \cdot \\ \vdots \\ \cdot \\ s_{ni} \end{pmatrix} (r_{1i} \ldots r_{ni}).$$

Weiterhin ist nach (25,7) $f(\lambda_i) \cdot \mathfrak{F}(\lambda_i) = \mathfrak{F}(\lambda_i) \cdot f(\lambda_i) = 0$.

Daher wird $\quad f(\lambda_i) \cdot (s_{ji}) \cdot (r_{ki}) = (s_{ji}) \cdot (r_{ki}) \cdot f(\lambda_i) = 0,$

also auch $\quad f(\lambda_i) \cdot (s_{ji}) = (\mathfrak{A} - \lambda_i \mathfrak{E}) \cdot (s_{ji}) = 0 \qquad (30,11)$

und $\quad (r_{ki})\, f(\lambda_i) = (r_{ki}) \cdot (\mathfrak{A} - \lambda_i \mathfrak{E}) = 0. \qquad (30,12)$

Die n Matrizengleichungen für alle Wurzeln (30,11) bzw. (30,12) können in eine einzige Gleichung zusammengefaßt werden:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 s_{11} & \ldots & \lambda_n s_{1n} \\ \cdot & & \\ \vdots & & \\ \cdot & & \\ \lambda_1 s_{n1} & \ldots & \lambda_n s_{nn} \end{pmatrix} = \mathfrak{S}\Lambda \tag{30,13}$$

mit

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

d. h. es ist, wenn $\mathfrak{S}$ eine Reziproke besitzt,

$$\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{S} = \Lambda \tag{30,14}$$

oder mit $\Lambda = \mathfrak{B}$ Gleichung (30,1) erhalten worden.

Das Ergebnis zeigt: Die Eigenwerte sind Invarianten gegenüber Ähnlichkeitstransformationen.

In der Hauptdiagonale der transformierten Matrix kommt also jede Nullstelle der charakteristischen Gleichung vor. Die Diagonalgestalt läßt sich also angeben und die transformierende Matrix $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{S}^{-1}$ ist nach (30,11) durch Auflösung des algebraischen Gleichungssystems bestimmt.

Sind die Eigenwerte nicht alle verschieden, so ist es möglich, daß eine Matrix durch eine Ähnlichkeitstransformation nicht auf die Diagonalgestalt gebracht werden kann. Hiervon handelt die in der vorigen Ziffer bereits erwähnte Elementarteilertheorie.

Beispiel 1: Einfache Wurzeln.

Es sei
$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 10 & -3 & -2 \\ -1 & {}^1/_2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Dann ist
$$f(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 1 \\ -10 & \lambda+3 & 2 \\ 1 & -{}^1/_2 & \lambda-4 \end{pmatrix}$$

und $|f(\lambda)| = \lambda^3 - 3\lambda^2 - 10\lambda + 24 = (\lambda-2)(\lambda+3)(\lambda-4)$,

d.h. $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 4$ und $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\text{Ist } \lambda = \lambda_1, \text{ so folgt } f(\lambda_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -10 & 5 & 2 \\ 1 & -{}^1/_2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Elemente s_{11}, s_{21}, s_{31} erhält man durch Auflösung der Gleichung
$$f(\lambda_1) \cdot \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \end{pmatrix} = 0,$$
sie sind z.B. $s_{11} = 1$, $s_{21} = 2$, $s_{31} = 0$.

Entsprechend ergibt sich für $\lambda = \lambda_2$: $s_{12} = 1$, $s_{22} = -68$, $s_{32} = 5$
und für $\lambda = \lambda_3$: $s_{13} = 1$, $s_{23} = 2$, $s_{33} = -2$.

Damit wird $\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -68 & 2 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{S}^{-1} = {}^1/_{140} \begin{pmatrix} 126 & 7 & 70 \\ 4 & -2 & 0 \\ 10 & -5 & -70 \end{pmatrix}$,

daher $\mathfrak{S}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{S} = \Lambda$.

Beispiel 2: Mehrfache Wurzeln.

Es sei
$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Dann ist $|f(\lambda)| = (\lambda-1)^2 (\lambda-2)$, also $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

$$\text{Mit } f(\lambda_1) = f(\lambda_2) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -10 & 5 & -5 \\ -5 & 4 & -5 \end{pmatrix} \text{ und } f(\lambda_3) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -10 & 6 & -5 \\ -5 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \text{ also } |\mathfrak{S}| = 0,$$

d. h. $\mathfrak{S}^{-1}$ existiert nicht, folglich läßt sich die Ähnlichkeitstransformation nicht ausführen.

31. Der n-dimensionale Vektorraum

Die in Ziffer 29 bzw. 30 eingeführten äquivalenten bzw. ähnlichen Matrizen können als lineare homogene Transformationen im n-dimensionalen Vektorraum interpretiert werden, und zwar in folgender Weise:

Ein n-dimensionaler Vektor sei ein geordnetes n-Tupel $\{a_1, \ldots a_n,\}$ von Elementen, die dem Bereich $\mathfrak{R}$ der komplexen oder auch nur dem Bereich der reellen Zahlen angehören*). Das Element an i-ter Stelle a_i heißt die i-te Komponente des Vektors. Zwei Vektoren $\mathfrak{a} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ und $\mathfrak{b} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ heißen dann und nur dann gleich, wenn $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$ ist (vgl. Gleichheit von Matrizen!). Die Gesamtheit aller n-dimensionalen Vektoren mit Komponenten aus $\mathfrak{R}$ heißt n-dimensionaler Vektorraum $\mathfrak{B}_n$ bezüglich $\mathfrak{R}$.

k Vektoren $a_1, \ldots, a_k$ heißen linear abhängig, wenn es k Elemente $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ aus $\mathfrak{R}$ gibt, die nicht alle gleich Null sind, und die Beziehung besteht:

$$\lambda_1 \mathfrak{a}_1 + \cdots + \lambda_k \mathfrak{a}_k = 0. \tag{31,1}$$

Gilt (31,1) nur, wenn alle $\lambda_i = 0$ sind, so heißen sie linear unabhängig. (31,1) heißt auch eine Linearkombination der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_k$ aus $\mathfrak{B}_n$. Unter der Dimension eines linearen Vektorgebildes $\mathfrak{L}$ im $\mathfrak{B}_n$ versteht man die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren von $\mathfrak{L}$. Ist p die Dimension von $\mathfrak{L}$, dann wird jedes System von p linear unabhängigen Vektoren aus $\mathfrak{L}$ eine Basis von $\mathfrak{L}$ genannt. Die Maximalzahl linear unabhängiger Vektoren des $\mathfrak{B}_n$ ist n. Die Dimension eines linearen Vektorgebildes in $\mathfrak{B}_n$ ist also stets $\leq n$.

Satz 104: Unter einer linearen Transformation von $\mathfrak{L}$ versteht man eine eindeutige Abbildung von $\mathfrak{L}$ auf sich, die folgende Eigenschaften besitzt:

a) Ist $\mathfrak{a}^*$ das Bild des Vektors $\mathfrak{a}$, dann ist $\lambda \mathfrak{a}^*$ das Bild von $\lambda \mathfrak{a}$ für beliebige λ aus $\mathfrak{R}$;

b) sind $\mathfrak{a}^*$ bzw. $\mathfrak{b}^*$ die Bilder von $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$, dann ist $\mathfrak{a}^* + \mathfrak{b}^*$ das Bild von $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.

Bezeichnet man die lineare Transformation durch die griechischen Buchstaben $\sigma, \tau, \ldots$ und den Bildvektor, den die lineare Transformation σ dem Vektor $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{L}$ zuordnet, durch $\sigma(\mathfrak{a})$, dann nehmen die beiden obigen Eigenschaften a) und b) die Gestalt an:

$$\sigma(\lambda \mathfrak{a}) = \lambda \sigma(\mathfrak{a}), \tag{31,2}$$

$$\sigma(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \sigma(\mathfrak{a}) + \sigma(\mathfrak{b}). \tag{31,3}$$

*) Es genügt, daß, algebraisch gesprochen, der Koeffizientenbereich $\mathfrak{R}$ ein Ring mit Einselement ist.

Zwei lineare Transformationen σ und τ heißen „gleich", wenn sie dieselbe Abbildung von $\mathfrak{L}$ auf sich liefern, also

$$\sigma = \tau \quad \text{wenn} \quad \sigma(\mathfrak{a}) = \tau(\mathfrak{a}) \text{ für alle } \mathfrak{a} \text{ aus } \mathfrak{L}$$

ist.

Um die analytische Darstellung einer linearen Transformation zu gewinnen, denken wir uns eine Basis $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ von $\mathfrak{L}$ und betrachten den Bildvektor des k-ten Basisvektors, also $\sigma(\mathfrak{a}_k)$; er ist auch aus $\mathfrak{L}$ und daher eindeutig als Linearkombination der Basis $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ darstellbar. Mit bestimmten Elementen a_{ik} aus $\mathfrak{K}$ sei etwa

$$\sigma(\mathfrak{a}_k) = a_{1k}\,\mathfrak{a}_1 + \cdots + a_{nk}\,\mathfrak{a}_n. \tag{31,4}$$

Solche Gleichung gilt für jedes $k = 1, \ldots, n$.

Weiterhin sei

$$\mathfrak{x} = x_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + x_n\mathfrak{a}_n \tag{31,5}$$

irgendein Vektor aus $\mathfrak{L}$. Die Elemente $x_1, \ldots, x_n$ heißen die Komponenten des Vektors bezüglich der Basis $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ oder auch die Komponenten von $\mathfrak{x}$ im Koordinatensystem $[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$. Die Elemente $x_1, \ldots, x_n$ sind eindeutig durch $\mathfrak{x}$ bestimmt, und umgekehrt läßt sich auch der Vektor $\mathfrak{x}$ eindeutig nach (31,5) aus den Komponenten $x_1, \ldots, x_n$ berechnen bei festem Koordinatensystem $[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$.

Die lineare Transformation σ führt den Vektor $\mathfrak{x}$ eindeutig in einen bestimmten Bildvektor $\sigma(\mathfrak{x})$ über. Die Komponenten von $\sigma(\mathfrak{x})$ im Koordinatensystem $[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$ seien $y_1, \ldots, y_n$. Dann gilt

$$\sigma(\mathfrak{x}) = y_1\mathfrak{a}_1 + \cdots + y_n\mathfrak{a}_n. \tag{31,6}$$

Da die Komponenten $y_1, \ldots, y_n$ des Vektors $\sigma(\mathfrak{x})$ eindeutig durch die Komponenten $x_1, \ldots, x_n$ des Vektors $\mathfrak{x}$ bestimmt sind, lassen sie sich aus ihnen berechnen. Wegen (31,2) und (31,3) wird

$$\sigma(\mathfrak{x}) = \sigma\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\,\mathfrak{a}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \sigma(x_k\,\mathfrak{a}_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k\,\sigma(\mathfrak{a}_k).$$

Daraus entsteht mit (31,4)

$$\sigma(\mathfrak{x}) = \sum_{k=1}^{n} (x_k \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,\mathfrak{a}_i) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,x_k\,\mathfrak{a}_i.$$

Durch Vergleich mit (31,6) ergibt sich

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,x_k)\,\mathfrak{a}_i = 0.$$

Als Basis von $\mathfrak{L}$ sind aber die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ linear unabhängig; es müssen daher die Koeffizienten der letzten Gleichung alle verschwinden:

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,x_k. \tag{31,7}$$

Diese Gleichung läßt sich auch folgendermaßen schreiben:

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}, \tag{31,8}$$

wenn $\mathfrak{A}$ die Matrix (a_{ik}) und $\mathfrak{y} = (y_i)$, $\mathfrak{x} = (x_k)$ ist.

Damit ist der Satz bewiesen:

Satz 105: Jede lineare Transformation von $\mathfrak{L}$ läßt sich in jedem Koordinatensystem $[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$ durch ein lineares Gleichungssystem der Gestalt (31,8) darstellen.

Auf Grund der Gleichung (31,8) wäre es möglich gewesen, von vornherein den Begriff Matrix mit den linearen Transformationen zu verbinden. Insbesondere tritt dies deutlich hervor, wenn Summe und Produkt zweier linearer Transformationen betrachtet werden.

Es sei gegeben:

$$\sigma(\mathfrak{a}_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\mathfrak{a}_i$$

und

$$\tau(\mathfrak{a}_k) = \sum_{i=1}^{n} b_{ik}\mathfrak{a}_i .$$

Dann wird

$$(\sigma + \tau)(\mathfrak{a}_k) = \sigma(\mathfrak{a}_k) + \tau(\mathfrak{a}_k) = \sum (a_{ik} + b_{ik})\mathfrak{a}_i , \tag{31,9}$$

d. h. die Additionsmatrix $\mathfrak{C}$ ist $\mathfrak{C} = (a_{ik} + b_{ik}) = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$

und

$$(\sigma \cdot \tau)(\mathfrak{a}_k) = \sigma[\tau(\mathfrak{a}_k)] = \sigma\left(\sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu k}\mathfrak{a}_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu k}\sigma(\mathfrak{a}_\nu)$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu k}\sum_{i=1}^{n} a_{i\nu}\mathfrak{a}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}b_{\nu k}\right)\mathfrak{a}_i , \tag{31,10}$$

d. h. die Produktmatrix $\mathfrak{C}$ hat die Gestalt $\mathfrak{C} = \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{i\nu}b_{\nu k}\right) = \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$.

Bisher hatten wir lineare Transformationen in einem Koordinatensystem $[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$ betrachtet. Der Übergang von einer Basis $\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ zu einer anderen Basis $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ heißt Koordinatentransformation.

$\mathfrak{x}$ sei ein Vektor aus $\mathfrak{L}$. Im Koordinatensystem $[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$ habe er die Komponenten $x_1, \ldots, x_n$, im Koordinatensystem $[\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n]$ aber die Komponenten $\overset{*}{x}_1, \ldots, \overset{*}{x}_n$, d. h. es ist

$$\mathfrak{x} = \sum_{k=1}^{n} x_k\mathfrak{a}_k = \sum_{k=1}^{n} \overset{*}{x}_k\mathfrak{b}_k . \tag{31,11}$$

Um die Komponenten $\overset{*}{x}_i$ aus den x_i berechnen zu können, benötigen wir die Komponenten der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ im Koordinatensystem $[\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n]$.

Wir setzen:

$$\mathfrak{a}_k = \sum_{i=1}^{n} t_{ik}\mathfrak{b}_i , \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{31,12}$$

(31,12) in (31,11) eingesetzt, ergibt

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k t_{ik}\right)\mathfrak{b}_i = \sum_{i=1}^{n} \overset{*}{x}_i\mathfrak{b}_i$$

oder

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\overset{*}{x}_i - \sum_{k=1}^{n} x_k t_{ik}\right)\mathfrak{b}_i = 0 .$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Basisvektoren $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ folgt daher

$$\overset{*}{x}_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} x_k \tag{31,13}$$

oder

$$\mathfrak{x}^* = \mathfrak{T}\mathfrak{x} \tag{31,14}$$

mit

$$\mathfrak{T} = (t_{ik}), \quad \mathfrak{x}^* = (\overset{*}{x}_i), \quad \mathfrak{x} = (x_i).$$

Aus (31,12) folgt, daß die Maximalzahl linear unabhängiger unter den Vektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ gleich dem Rang der Matrix $\mathfrak{T}$ ist. Die Vektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ sind aber als Basis von $\mathfrak{L}$ in ihrer Gesamtheit linear unabhängig, d. h. der Rang von $\mathfrak{T}$ ist $r(\mathfrak{T}) = n$, also $|\mathfrak{T}| \neq 0$, folglich existiert $\mathfrak{T}^{-1}$. Linke Multiplikationen von (31,14) mit $\mathfrak{T}^{-1}$ ergibt daher

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{x}^*. \tag{31,15}$$

Die $\overset{*}{x}_i$ sind also aus den x_i berechenbar.

Ist nun $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ die Matrix der linearen Transformation im Koordinatensystem $[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$, $\mathfrak{B} = (\mathfrak{b}_{ik})$ die im Koordinatensystem $[\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n]$, so wird im allgemeinen $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}$ sein und es fragt sich, welcher Zusammenhang zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ besteht.

σ war im Koordinatensystem $[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$ durch das lineare Gleichungssystem (31,8) $\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}$ dargestellt. Im Koordinatensystem $[\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n]$ wird σ durch das Gleichungssystem

$$\overset{*}{y}_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} \overset{*}{x}_k \tag{31,16}$$

dargestellt, oder durch

$$\mathfrak{y}^* = \mathfrak{B}\mathfrak{x}^*. \tag{31,17}$$

Der Übergang vom Koordinatensystem $[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$ zum Koordinatensystem $[\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n]$ wird wieder vermittelt durch die Gleichung

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}^*. \tag{31,18}$$

Setzt man dies in (31,8) ein, so folgt mit (31,15)

$$\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{y}^* = \mathfrak{A}\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{x}^*$$

oder nach linker Multiplikation mit $\mathfrak{T}$

$$\mathfrak{y}^* = \mathfrak{T}\mathfrak{A}\mathfrak{T}^{-1}\mathfrak{x}^*. \tag{31,19}$$

Diese Gleichung gestattet, die Komponenten $\overset{*}{y}_i$ vom $\sigma(\mathfrak{x})$ im Koordinatensystem $[b_1, \ldots, b_n]$ aus den Komponenten $\overset{*}{x}_i$ von $\mathfrak{x}$ im gleichen Koordinatensystem zu berechnen. Da aber das Gleichungssystem, das σ im Koordinatensystem $[\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n]$ darstellt, eindeutig bestimmt ist, muß (31,19) identisch mit (31,17) sein; d. h. es muß gelten

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{T}\mathfrak{A}\mathfrak{T}^{-1}. \tag{31,20}$$

Damit haben wir den Zusammenhang zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gewonnen. (31,20) stellt also nichts anderes dar als die in Ziffer 30 besprochene Ähnlichkeitstransformation.

Damit ist der Satz gewonnen:

Satz 106: Wenn die lineare Transformation σ in einem Koordinatensystem $[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$ die Matrix $\mathfrak{A}$, in einem anderen Koordinatensystem $[\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n]$ die Matrix $\mathfrak{B}$ hat, dann geht $\mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{A}$ durch Transformation mit einer nichtsingulären Matrix $\mathfrak{T}$ hervor. $\mathfrak{T}$ ist die Koeffizientenmatrix der Transformationsgleichungen beim Übergang vom Koordinatensystem $[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$ zum System $[\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n]$. Ebenso geht $\mathfrak{A}$ aus $\mathfrak{B}$ durch Tranformation hervor, und zwar gilt

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{T}^{-1}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{T}. \tag{31,21}$$

Die Ähnlichkeitstransformation behandelte eine Abbildung eines linearen Vektorgebildes $\mathfrak{L}$ auf sich. Liegen nun zwei Vektorgebilde $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ vor und werden beide Vektoren aufeinander abgebildet, so ergibt sich bei Bezug auf ein neues Koordinatensystem folgendes:

Nach (31,8) ist $\qquad \mathfrak{y} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{x}.$

In $\mathfrak{L}$ besteht die Transformation (31,5): $\qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{T}^{-1}\,\mathfrak{x}^*,$

in $\mathfrak{M}$ dagegen
$$\mathfrak{y} = \mathfrak{S}^{-1}\,\mathfrak{y}^*, \tag{31,22}$$
wobei $\mathfrak{S} = (s_{ik})$ ist.

Daraus folgt aber
$$\mathfrak{S}^{-1}\,\mathfrak{y}^* = \mathfrak{A}\,\mathfrak{T}^{-1}\,\mathfrak{x}^*$$
oder
$$\mathfrak{y}^* = (\mathfrak{S}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{T}^{-1})\,\mathfrak{x}^*, \tag{31,23}$$
d. h. an die Stelle der Matrix (31,20) als ähnlicher Matrix tritt hier die in Ziffer 29 behandelte äquivalente Matrix
$$\mathfrak{B} = \mathfrak{S}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{T}^{-1}. \tag{31,24}$$

Äquivalente Matrizen sind daher Verallgemeinerungen der ähnlichen Matrizen.

Damit wir den Satz erhalten:

Satz 107: Wird in einem Koordinatensystem $[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$ eine lineare Abbildung eines Vektors $\mathfrak{x}$ im Vektorgebilde $\mathfrak{L}$ auf einen Vektor $\mathfrak{y}$ im Vektorgebilde $\mathfrak{M}$ durch die Matrix $\mathfrak{A}$ dargestellt, so wird in einem Koordinatensystem $[\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n]$ die Abbildung des Vektors $\mathfrak{x}^*$ in den Vektor $\mathfrak{y}^*$ durch die Matrix $\mathfrak{B}$ dargestellt. $\mathfrak{B}$ geht aus $\mathfrak{A}$ in der Weise hervor, daß beim Übergang vom Koordinatensystem $[\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n]$ zum Koordinatensystem $[\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n]$ $\mathfrak{T}$ die Koeffizientenmatrix der Transformationsgleichungen des Vektors $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{x}^*$, $\mathfrak{S}$ die Koeffizientenmatrix der Transformationsgleichungen des Vektors $\mathfrak{y}$ in $\mathfrak{y}^*$ ist.

Ist $\mathfrak{L}$ identisch mit $\mathfrak{M}$, so wird $\mathfrak{S} = \mathfrak{T}$ und wir erhalten wieder die Ähnlichkeitstransformation.

In Ziffer 30 hatten wir gesehen, daß die Normalform einer ähnlichen Matrix eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonalelemente die Eigenwerte sind. Es ist also ein ganz bestimmtes Koordinatensystem ausgezeichnet worden. Diese Koordinatensysteme, in denen eine Matrix durch die Diagonalgestalt dargestellt wird, heißen Hauptachsensysteme.

Wir betrachten nun einen Eigenwert λ_1. Da $|\mathfrak{A} - \lambda_1 \mathfrak{E}| = 0$ ist, so ist das lineare homogene Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n &= \lambda_1 x_1 \\ &\vdots \\ a_{n1} x_1 + \cdots + a_{nn} x_n &= \lambda_1 x_n \end{aligned}\right\} \tag{31,25}$$

lösbar. Zu allen n Eigenwerten λ_k läßt sich ein lineares homogenes Gleichungssystem nach (31,25) aufstellen. Die Lösungen dieses Systems, die nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt sind, bezeichen wir mit x_{ik}, so daß

$$\sum_j a_{ij} x_{jk} = \lambda_k x_{ik} \tag{31,26}$$

wird. Die Gesamtheit der n Zahlen $x_{ik}, \ldots, x_{nk}$ nennen wir einen Eigenvektor $\mathfrak{x}_{.k}$ der Matrix $\mathfrak{A}$. Der Eigenvektor $\mathfrak{x}_{.k}$ gehört zum Eigenwert λ_k. Gleichung (31,26) kann dann auch geschrieben werden

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}_{.k} = \lambda_k\, \mathfrak{x}_{.k}\,. \tag{31,27}$$

Die Matrix führt also ihre Eigenvektoren in Vektoren über, die sich vom Eigenvektor nur durch einen konstanten Faktor, den Eigenwert unterscheiden.

Man kann die Eigenvektoren $\mathfrak{x}_{.1}, \ldots, \mathfrak{x}_{.n}$ zu einer Matrix $\mathfrak{X}$ zusammenfassen, so daß $\mathfrak{x}_{.k}$ die k-te Spalte dieser Matrix bildet. Werden die Elemente von $\mathfrak{X}$ mit $\mathfrak{x}_{ik}$ bezeichnet, so ist

$$X_{ik} = (\mathfrak{x}_{.k})_i = \mathfrak{x}_{ik}\,.$$

Dann steht in (31,26) der (ik)-Koeffizient von $\mathfrak{A}\mathfrak{X}$. Auch die rechte Seite kann man als den (ik)-Koeffizienten einer Matrix auffassen, nämlich als den (ik)-Koeffizienten von $\mathfrak{X}\Lambda$, wo Λ eine Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ist.

Dann lautet (31,26):

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{X})_{ik} = \sum_j X_{ij}\, \delta_{jk}\, \lambda_k = (\mathfrak{X}\Lambda)_{ik}\,,$$

und man kann die n^2 Gleichungen (31,26) in

$$\mathfrak{A}\mathfrak{X} = \mathfrak{X}\Lambda \tag{31,28}$$

oder, wenn $\mathfrak{X}$ eine Reziproke hat in

$$\mathfrak{X}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{X} = \Lambda \tag{31,29}$$

zusammenfassen [vgl. (30,14)].

Damit ist der Satz gewonnen:

Satz 108: Eine Ähnlichkeitstransformation mit einer Matrix, deren Spalten die n Eigenvektoren sind, bringt die Matrix auf die Diagonalform. Die Diagonalelemente sind die Eigenwerte der Matrix.

Lassen sich zwei Matrizen mit derselben Transformation auf die Diagonalgestalt bringen, haben sie dieselben Eigenvektoren, so sind sie vertauschbar. Sie sind es nämlich als Diagonalmatrizen sicher nach der Ähnlichkeitstransformation, also waren sie es schon vorher.

32. Bilinearformen, quadratische und hermitische Formen

Außer Transformationen mit reellen Koeffizienten lassen wir jetzt auch Transformationen mit komplexen Koeffizienten zu, die auf Vektoren mit komplexen Komponenten ausgeübt werden. Dann ist das skalare Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gegeben durch

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_i x_i y_i^*, \tag{32,1}$$

wobei der * wie in Ziffer 16 die konjugiert komplexe Größe bedeutet.

Ist $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ nicht reell, so hängt der Wert von $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ von der Reihenfolge ab und es ist

$$(\mathfrak{y}, \mathfrak{x}) = \sum_i y_i x_i^* = (\mathfrak{x}^*, \mathfrak{y}^*) = (\mathfrak{x}, \mathfrak{y})^*. \tag{32,2}$$

$(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ bedeutet, daß die beiden Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ senkrecht aufeinander stehen, sie sind orthogonal zueinander.

Das skalare Produkt eines Vektors mit sich selbst ist

$$(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = \sum_i x_i x_i^* = \sum_i |x_i|^2 \geqq 0; \tag{32,3}$$

($|x_i|$ bedeutet hier den absoluten Betrag!).

Die reelle Größe

$$|\mathfrak{x}| = \sqrt{(\mathfrak{x}, \mathfrak{x})} \tag{32,4}$$

nennt man die Länge des Vektors.

Man kann nun in $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ den Vektor $\mathfrak{x}$ durch $\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ ersetzen, wobei $\mathfrak{A}$ irgendeine Matrix bedeutet. Es wird dann für reelle Vektoren

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k, \tag{32,5}$$

für komplexe Vektoren

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k^*, \tag{32,6}$$

Gleichungen, die als Bilinearformen bezeichnet werden.

Die Begriffe symmetrisch, schief, Rang, singulär, transponiert, invers, adjungiert, Summen und Produkte übertragen sich von den Matrizen her unmittelbar auf die Bilinearformen. Das Produkt zweier Bilinearformen erhält man also nicht durch Ausmultiplizieren, sondern es ist wieder eine Bilinearform, deren Matrix das Produkt der Matrizen der ursprünglichen Bilinearformen ist.

Aus $\quad (\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k^*$ und $(\mathfrak{B}\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i,k} b_{ik} x_i y_k^*$

folgt $\quad (\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \cdot (\mathfrak{B}\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{C}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})) = \sum_{i,k} \sum_{\nu} a_{i\nu} b_{\nu k} x_i y_k^*.$

Für $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}$ geht die symmetrische Bilinearform in die reelle quadratische Form

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k \tag{32,7}$$

über.

Ist $a_{ik} = a_{ki}^*$, d. h. liegt eine hermitische Matrix $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^\dagger$ vor, so entsteht die hermitische Form

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = \sum_{i,k} a_{ik}\, x_i\, x_k^*; \tag{32,8}$$

sie besitzt reelle Werte; denn es ist mit (32,2) und (32,6)

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{x})^* = (\mathfrak{x}, \mathfrak{A}\mathfrak{x}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{x}). \tag{32,9}$$

Wenn man in einer Bilinearform

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i\, y_k$$

die Variablen den beiden Transformationen

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\, \xi_k, \quad y_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, \eta_k$$

mit den Matrizen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}$ unterwirft, so wird

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i\, y_k = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} a_{ik}\, c_{ij}\, b_{kl}\, \xi_j\, \eta_l$$

$$= \sum_{j,l}^{n} p_{jl}\, \xi_j\, \eta_l, \quad p_{jl} = \sum_{i,k}^{n} a_{ik}\, c_{ij}\, b_{kl}. \tag{32,10}$$

Es entsteht also aus $\mathfrak{A}$ eine transformierte Bilinearform mit der Matrix

$$(p_{jl}) = \overline{\mathfrak{C}}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}. \tag{32,11}$$

Liegt speziell eine quadratische Form

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = \Sigma\, a_{ik}\, x_i\, x_k$$

mit der symmetrischen Matrix $\mathfrak{A}$ vor, so ist $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ zu setzen; es entsteht daher bei der Transformation der Variablen die Matrix $\overline{\mathfrak{C}}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{C}$.

Transformiert man eine hermitische Form $(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$ auf neue Variable durch $\mathfrak{x} = \mathfrak{S}\mathfrak{x}'$, so folgt wegen (33,9)

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{S}\mathfrak{x}', \mathfrak{S}\mathfrak{x}') = (\mathfrak{S}^\dagger\mathfrak{A}\mathfrak{S}\mathfrak{x}', \mathfrak{x}') = (\mathfrak{B}\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'), \tag{32,12}$$

wo also

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{S}^\dagger\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{S} \tag{32,13}$$

ist. Diese Matrix ist wieder hermitisch:

$$\mathfrak{B}^\dagger = \mathfrak{B}. \tag{32,14}$$

Der Einheitsmatrix entspricht als hermitische Form das skalare Produkt eines Vektors mit sich selbst, oder die Einheitsform (32,3).

Es werde nun noch das bekannte Verfahren mitgeteilt, eine hermitische Form auf Hauptachsen zu transformieren. Ist wieder (32,8) gegeben, so suche man die linearen Gleichungen

$$w\, x_j - \sum_{l} a_{jl}\, x_l = 0 \tag{32,15}$$

zu lösen. Dies ist nur für die Eigenwerte w_i möglich. Liegt keine Entartung vor, so

gehört zu jedem w_i eine bis auf einen konstanten Faktor bestimmte Lösung $x_j = x_{ji}$, so daß gilt:

$$w_i x_{ji} - \sum_l a_{jl} x_{li} = 0, \quad w_k x_{jk}^* - \sum_l a_{jl}^* x_{lk}^* = 0.$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit x_{jk}^*, die zweite mit x_{ji} und summiert über j, so folgt durch Subtraktion wegen des hermitischen Charakters von a

$$(w_k - w_i) \sum_j x_{jk}^* x_{ji} = 0. \tag{32,16}$$

Der Proportionalitätsfaktor kann so gewählt werden, daß

$$\sum_j x_{jk}^* x_{ji} = 1 \tag{32,17}$$

ist und die x_{ji} daher eine orthogonale Matrix (x_{ji}) bilden. Diese transformiert also die gegebene Form gerade auf eine Quadratsumme; denn setzt man

$$x_j = \sum_i x_{ji} y_i, \quad x^*_l = \sum_k x_{lk} y^*_k,$$

so erhält man

$$\begin{aligned}\sum_{jl} a_{jl} x_j x^*_l &= \sum_{j,l} \sum_{i,k} a_{jl} x_{ji} x_{lk}^* y_i y^*_k, \\ &= \sum_{i,k} \sum_l w_i x_{li} x_{lk}^* y_i y^*_k \\ &= \sum_i w_i y_i y^*_i \end{aligned} \tag{32,18}$$

(vgl. auch § 33).

33. Unitäre Transformationen

Satz 109: Jede unitäre und hermitische Matrix läßt sich durch eine Ähnlichkeitstransformation mit einer unitären Matrix auf die Diagonalform bringen.

Wird eine Matrix unitär transformiert, so bleibt sie unitär bzw. hermitisch. Sei $\mathfrak{V}$ eine unitäre, $\mathfrak{H}$ eine hermitische Matrix, $\mathfrak{U}$ die unitäre Transformationsmatrix, so ist

$$\mathfrak{U}^\dagger \mathfrak{V} \mathfrak{U} = \mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{V} \mathfrak{U}$$

als Produkt von drei unitären Matrizen nach (19,5) wieder unitär. Aber auch

$$\mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{H} \mathfrak{U}$$

bleibt hermitisch; denn es ist

$$(\mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{H} \mathfrak{U})^\dagger = \mathfrak{U}^\dagger \mathfrak{H} \mathfrak{U}^{-1\dagger} = \mathfrak{U}^\dagger \mathfrak{H} \mathfrak{U} = \mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{H} \mathfrak{U}.$$

Es sei nun λ_1 ein Eigenwert von $\mathfrak{V}$ bzw. $\mathfrak{H}$. Der zugehörige Eigenvektor, der nur bis auf einen konstanten Faktor bestimmt ist, sei $\mathfrak{u}_{\cdot 1} = (\mathfrak{u}_{11}, \mathfrak{u}_{21}, \ldots, \mathfrak{u}_{n1})$. Den konstanten Faktor nimmt man so groß an, daß das innere Produkt $(\mathfrak{u}_{\cdot 1}, \mathfrak{u}_{\cdot 1}) = 1$ sei. Da $(\mathfrak{u}_{\cdot 1}, \mathfrak{u}_{\cdot 1})$ nicht verschwinden kann, ist das immer möglich. Bildet man nun eine unitäre Matrix $\mathfrak{U}$, deren erste Spalte $\mathfrak{u}_{\cdot 1}$ ist, so kann man mit dieser Matrix $\mathfrak{V}$ bzw. $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{V} \mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{H} \mathfrak{U}$ transformieren. Da ja $\mathfrak{u}_{\cdot 1}$ ein Eigenvektor von $\mathfrak{V}$ ist, kommt daher im 1. Fall in die 1. Spalte

$$x_{n1} = (\mathfrak{U}^{-1} \mathfrak{V} \mathfrak{U})_{n1} = (\mathfrak{U}^\dagger \mathfrak{V} \mathfrak{U})_{n1} = \sum_\nu \mathfrak{u}_{\nu n}^* \sum_\mu \mathfrak{v}_{\nu\mu} \mathfrak{u}_{\mu 1} = \sum_\nu \mathfrak{u}_{\nu n}^* \lambda_1 \mathfrak{u}_{\nu 1} = \delta_{n1} \lambda_1.$$

In die erste Zeile der 1. Spalte kommt λ_1, sonst ist sie leer. Dies gilt entsprechend auch für $\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{H}\mathfrak{U}$; d. h. $\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{H}\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{V}\mathfrak{U} = \mathfrak{X}$ haben die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \tag{33,1}$$

Da $\mathfrak{X}$ eine unitäre Matrix ist, ist seine 1. Spalte $\mathfrak{x}_{\cdot 1}$ ein Einheitsvektor, d. h. es muß sein:

$$|x_{11}|^2 + |x_{21}|^2 + \cdots + |x_{n1}|^2 = |\lambda_1^2| = 1.$$

(Die senkrechten Striche bedeuten hier naturgemäß die Absolutbeträge!) Dasselbe muß aber von der 1. Zeile $\mathfrak{x}_1$ gelten, d. h. es ist

$$|x_{11}|^2 + |x_{12}|^2 + \cdots + |x_{1n}|^2 = |\lambda_1^2| + |x_{12}|^2 + \cdots + |x_{1n}|^2,$$

so daß die Summe der Absolutwertquadrate von $x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{1n}$ verschwindet, also auch $x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{1n}$ selbst. Jede unitäre bzw. hermitische Matrix läßt sich daher unitär auf die Gestalt (33,1) transformieren.

Um die vollständige Diagonalgestalt zu erhalten, ist es zweckmäßig, die Matrix (33,1) als Übermatrix zu schreiben, und zwar in der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathfrak{V}_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathfrak{H}_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \tag{33,2}$$

wobei $\mathfrak{V}_1$ bzw. $\mathfrak{H}_1$ nur noch $n-1$ Zeilen und Spalten besitzen. (33,2) wird nun durch eine weitere unitäre Matrix

$$\mathfrak{U}_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{U}_1 \end{pmatrix}, \tag{33,3}$$

wobei $\mathfrak{U}_1$ $n-1$ Zeilen und Spalten hat, transformiert. (33,2) geht daher über in

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathfrak{U}_1^{\dagger}\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathfrak{U}_1^{\dagger}\mathfrak{H}_1\mathfrak{U}_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}. \tag{33,4}$$

Wie vorher, kann man $\mathfrak{U}_1$ so wählen, daß $\mathfrak{U}_1^{\dagger}\mathfrak{V}_1\mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_1^{\dagger}\mathfrak{H}_1\mathfrak{U}_1$ die Gestalt

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \mathfrak{V}_2 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \mathfrak{H}_2 \end{pmatrix}$$

besitzt, wo $\mathfrak{V}_2$ bzw. $\mathfrak{H}_2$ nur noch n–2 Zeilen und Spalten hat. Damit entsteht die Matrix

$$\mathfrak{U}^\dagger_{(1)} \mathfrak{U}^\dagger \mathfrak{V} \mathfrak{U} \mathfrak{U}_{(1)} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{V}_2 \end{pmatrix} \tag{33,5}$$

mit

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Wird dieses Verfahren fortgesetzt, so gelingt es offenbar, $\mathfrak{V}$ oder $\mathfrak{H}$ ganz auf die Diagonalform zu bringen.

Der Satz 109 gilt nicht für symmetrische und komplexe orthogonale Matrizen, wohl aber für reelle symmetrische und reelle orthogonale Matrizen, die ja nur einen Spezialfall der hermitischen bzw. unitären bilden.

Ist $\mathfrak{V}$ bzw. $\mathfrak{H}$ somit auf die Diagonalform gebracht, so ist die entstandene Matrix Λ_v bzw. Λ_h auch weiter unitär bzw. hermitisch. Es ergibt sich:

$$\Lambda_v \Lambda^\dagger_v = \mathfrak{E}, \tag{33,6}$$

bzw.

$$\Lambda_h = \Lambda^\dagger_h. \tag{33,7}$$

Damit folgt für die Eigenwerte aus (33,6): $\lambda_v \lambda^\dagger_v = 1$, d. h. sie sind ihrem Absolutwert nach 1, aus (33,7): $\lambda = \lambda^\dagger$, d. h. sie sind reell, Ergebnisse, die bereits abgeleitet worden sind.

Im Anschluß an die in Ziffer 31 behandelte Vektorendarstellung im n-dimensionalen Vektorraum, soll nun jetzt der Satz 109 auf einem anderen Wege bewiesen werden.

Zwei komplexe Vektoren $\mathfrak{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\mathfrak{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ heißen unitär orthogonal, wenn

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}^* = 0 \tag{33,8}$$

ist. Diese Definition ist symmetrisch in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$; denn es ist

$$(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}^*)^* = \mathfrak{x}^*\,\mathfrak{y}^{**} = \mathfrak{x}^*\,\mathfrak{y} = 0\,.$$

Für zwei reelle Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ fällt der Begriff unitär-orthogonal mit dem reellen Orthogonalitätsbegriff zusammen.

Es soll nun ein System von Vektoren $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n$ unitär-orthogonal-normiert heißen, wenn für

$$1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq n$$

$$\mathfrak{v}_i\,\mathfrak{v}_k^* = \delta_{ik} = \mathfrak{v}_i^*\,\mathfrak{v}_k \tag{33,9}$$

ist. Für ein reelles Orthogonalsystem ist

$$\mathfrak{v}_k^* = \mathfrak{v}_k\,.$$

Unitäre Transformationen sind nun dadurch ausgezeichnet, daß sie die Länge eines Vektors invariant lassen, d. h. es muß sein

$$|\tau(\mathfrak{x})| = |\mathfrak{x}| \tag{33,10}$$

oder auch

$$\tau(\mathfrak{x}) \cdot \tau(\mathfrak{x})^* = \mathfrak{x}\,\mathfrak{x}^*\,. \tag{33,11}$$

Dabei bedeutet $\tau(\mathfrak{x})$ eine lineare Transformation. Der so gekennzeichnete n-dimensionale Vektorraum heißt HILBERT-Raum, die Vektoren HILBERT-Vektoren.

Als Verallgemeinerung von (33,11) ist für jede unitäre Transformation

$$\tau(\mathfrak{x})\,\tau(\mathfrak{y})^* = \mathfrak{x}\,\mathfrak{y}^* . \tag{33,12}$$

Der Beweis ergibt sich folgendermaßen: Ersetzt man in (33,11) $\mathfrak{x}$ durch $\mathfrak{x} + a\,\mathfrak{y}$, wobei a eine beliebige komplexe Zahl bedeutet, so folgt

$$\tau(\mathfrak{x} + a\,\mathfrak{y}) \cdot \tau(\mathfrak{x} + a\,\mathfrak{y})^* = (\mathfrak{x} + a\,\mathfrak{y})\,(\mathfrak{x} + a\,\mathfrak{y})^* .$$

Nun ist

$$\tau(\mathfrak{x} + a\,\mathfrak{y}) = \tau(\mathfrak{x}) + a\,\tau(\mathfrak{y}) .$$

Daher wird

$$\tau(\mathfrak{x})\,\tau(\mathfrak{x})^* + a\,\tau(\mathfrak{y})\,\tau(\mathfrak{x})^* + a^*\,\tau(\mathfrak{x})\,\tau(\mathfrak{y})^* + a\,a^*\,\tau(\mathfrak{y})\,\tau(\mathfrak{y})^*$$
$$= \mathfrak{x}\,\mathfrak{x}^* + a\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{x}^* + a^*\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}^* + a\,a^*\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{y}^* .$$

Also ist auch

$$a\,\tau(\mathfrak{y})\,\tau(\mathfrak{x})^* + a^*\,\tau(\mathfrak{x})\,\tau(\mathfrak{y})^* = a\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{x}^* + a^*\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}^* .$$

Für $a = 1$ ergibt sich

$$\tau(\mathfrak{y})\,\tau(\mathfrak{x})^* + \tau(\mathfrak{x})\,\tau(\mathfrak{y})^* = \mathfrak{y}\,\mathfrak{x}^* + \mathfrak{x}\,\mathfrak{y}^* , \tag{33,13}$$

für $a = i$ dagegen

$$i\,\tau(\mathfrak{y})\,\tau(\mathfrak{x})^* - i\,\tau(\mathfrak{x})\,\tau(\mathfrak{y})^* = i\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{x}^* - i\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}^* . \tag{33,14}$$

Multplikation von (33,14) mit i sowie Addition von (33,13) und (33,14) liefert (33,12).

Um nun die Matrix der unitären Transformationen zu finden, müssen die Vektoren $\tau(\mathfrak{v}_i)$ als Linearkombinationen der $\mathfrak{v}_i$ dargestellt werden. Es sei

$$\tau(\mathfrak{v}_i) = \sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu i}\,\mathfrak{v}_\nu , \tag{33,15}$$

dann lautet die Matrix von τ

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} . \tag{33,16}$$

Setzt man in (33,12) $\mathfrak{x} = \mathfrak{v}_i$, $\mathfrak{y} = \mathfrak{v}_k$, so folgt wegen (33,9)

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu i}\,\mathfrak{v}_\nu \cdot \sum_{\mu=1}^{n} b^*_{\mu k}\,\mathfrak{v}^*_\mu = \delta_{ik} ,$$

$$\sum_{\nu,\mu=1}^{n} (b_{\nu i}\,b^*_{\mu k})\,\mathfrak{v}_\nu\,\mathfrak{v}^*_\mu = \delta_{ik} .$$

Da auch $\mathfrak{v}_\nu\,\mathfrak{v}^*_\mu = \delta_{ik}$, so erhält man

$$\sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu i}\,b^*_{\nu k} = \delta_{ik} . \qquad (i, k = 1, \cdots, n) \tag{33,17}$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung steht das Skalarprodukt der Vektoren $\{b_{1i}, \dots, b_{ni}\}$ und $\{b^*_{1k}, \dots, b^*_{nk}\}$. (33,17) besagt also, das die Spaltenvektoren der Matrix (33,16) ein unitär-orthonormiertes System bilden.

Geht man umgekehrt von einer Matrix $\mathfrak{B} = (b_{ik})$ aus, deren Elemente den Gleichungen (33,17) genügen, so stellt das Gleichungssystem

$$y_i = \sum b_{ik} x_k$$

bezüglich einer unitär-normierten Basis $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n$ eine unitäre Transformation dar; denn es folgt aus (33,17)

$$\sum_{i=1}^{n} y_i y_i^* = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k,j=1}^{n} b_{ik} x_k b_{ij}^* x_j^* = \sum_{k,j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ik} b_{ij}^* \right) x_k x_j^*$$

$$= \sum_{k,j=1}^{n} \delta_{kj} x_k x_j^* = \sum_{k=1}^{n} x_k x_k^* ,$$

d. h. aber, es ist $\tau(\mathfrak{x}) \cdot \tau(\mathfrak{x})^* = \mathfrak{x} \cdot \mathfrak{x}^*$. Die Matrizen, die zu den unitären Transformationen gehören, können also wegen (33,17) zusammengefaßt werden in

$$\overline{\mathfrak{B}} \cdot \mathfrak{B}^* = \mathfrak{E},$$

oder auch in

$$\mathfrak{B}\mathfrak{B}^\dagger = \mathfrak{B}^\dagger \mathfrak{B} = \mathfrak{E}, \tag{33,18}$$

womit gezeigt ist, daß $\mathfrak{B}$ eine unitäre Matrix ist.

Die Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ bilden eine unitär-orthogonal-normierte Basis des n-dimensionalen Vektorraumes. Es gehört daher zu einer vorgegebenen unitären Matrix $\mathfrak{B}$ im Koordinatensystem $[\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n]$ eine unitäre Transformation τ. Nun läßt sich eine unitär-normierte Basis $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n$ finden, bezüglich der die Matrix von τ Diagonalgestalt besitzt. Diese Matrix von τ bezüglich $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n$ sei $\mathfrak{C}$.

Dann gilt

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{U}\mathfrak{C}\mathfrak{U}^{-1}, \tag{33,19}$$

wobei $\mathfrak{U}$ die Matrix der Koordinatentransformation beim Übergang von der Basis $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n$ zur Basis $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ ist. Stellt man die Vektoren $\mathfrak{v}_i$ als Linearkombination der $\mathfrak{e}_i$ dar, so erhält man mit

$$\mathfrak{v}_k = \{\mathfrak{v}_{1k}, \ldots, \mathfrak{v}_{nk}\} = \sum_{i=1}^{n} v_{ik} \mathfrak{e}_i$$

die Matrix

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \\ v_{n1} & \cdots & v_{nn} \end{pmatrix}. \tag{33,20}$$

Diese Matrix ist wieder unitär; denn ihre Spaltenvektoren sind ja $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n$. Mit $\mathfrak{U}$ ist auch $\mathfrak{U}^{-1}$ unitär. Und da wegen (33,19)

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{B}\mathfrak{U} \tag{33,21}$$

ist, so ist der Satz 109 vollständig bewiesen.

Besteht die Matrizengleichung (33,18) $\mathfrak{B}\mathfrak{B}^\dagger = \mathfrak{B}^\dagger\mathfrak{B}$, so nennt man $\mathfrak{B}$ auch eine normale Matrix. Die Eigenschaft, normal zu sein, ist eine unitäre invariante; denn wenn $\mathfrak{B} = \mathfrak{U}\mathfrak{C}\mathfrak{U}^{-1}$, so ist

$$\mathfrak{B}\mathfrak{B}^\dagger = (\mathfrak{U}\mathfrak{C}\mathfrak{U}^\dagger)(\mathfrak{U}\mathfrak{C}\mathfrak{U}^\dagger)^\dagger = \mathfrak{U}\mathfrak{C}\mathfrak{C}^\dagger\mathfrak{U}^\dagger$$

und

$$\mathfrak{B}^\dagger\mathfrak{B} = (\mathfrak{U}\mathfrak{C}\mathfrak{U}^\dagger)^\dagger(\mathfrak{U}\mathfrak{C}\mathfrak{U}^\dagger) = \mathfrak{U}\mathfrak{C}^\dagger\mathfrak{C}\mathfrak{U}^\dagger;$$

wegen (33,18) ist dann auch

$$\mathfrak{C}\mathfrak{C}^\dagger = \mathfrak{C}^\dagger\mathfrak{C}.$$

Es gilt nun folgender

Satz 110: Ist $\mathfrak{A}$ nicht singulär, so existieren zwei unitäre Matrizen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$, so daß

$$\mathfrak{U}\mathfrak{A}\mathfrak{V} = (\Sigma\, \mu_i\, \delta_{ik}), \tag{33,22}$$

wobei μ_i die positiven Wurzeln der charakteristischen Wurzeln von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^\dagger$ sind.

Beweis: Da $\mathfrak{A}^\dagger\mathfrak{A}$ positiv semi-definit hermitisch ist, existiert eine unitäre Matrix $\mathfrak{V}$, so daß

$$\mathfrak{V}^\dagger\mathfrak{A}^\dagger\mathfrak{A}\mathfrak{V} = (\Sigma\, \lambda_i\, \delta_{ik}) \tag{33,23}$$

und $\lambda_i > 0$ ist. Wird nun $\mathfrak{A}\mathfrak{V} = \mathfrak{K}$ gesetzt, so folgt aus (33,23)

$$\mathfrak{K}^\dagger\mathfrak{K} = (\Sigma\, \lambda_i\, \delta_{ik}). \tag{33,24}$$

Wird weiterhin $\mathfrak{K} = \mathfrak{W}\mathfrak{M}$, wobei $\mathfrak{M} = (\Sigma\, \mu_i\, \delta_{ik})$ und $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ ist, dann ergibt sich

$$\sum_\nu w_{\nu i}^* w_{\nu k} = \sum_\nu \frac{k_{\nu i}}{\mu_i}\frac{k_{\nu k}}{\mu_k} = \delta_{ik},$$

d. h. aber $\mathfrak{W}$ ist eine unitäre Matrix; wird schließlich $\mathfrak{W} = \mathfrak{U}^{-1}$ eingesetzt, so folgt

$$\mathfrak{U}\mathfrak{A}\mathfrak{V} = \mathfrak{M}.$$

Sind umgekehrt $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ unitäre Matrizen, so daß $\mathfrak{U}\mathfrak{A}\mathfrak{V} = \mathfrak{M}$ ist, dann ist

$$\mathfrak{V}^\dagger\mathfrak{A}^\dagger\mathfrak{A}\mathfrak{V} = \mathfrak{M}^2 = \mathfrak{U}\mathfrak{A}\mathfrak{A}^\dagger\mathfrak{U}^\dagger;$$

denn es ist

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^\dagger = \mathfrak{V}^\dagger\mathfrak{A}^\dagger\mathfrak{U}^\dagger$$

und

$$\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{V}^\dagger\mathfrak{A}^\dagger\mathfrak{U}^\dagger\mathfrak{U}\mathfrak{A}\mathfrak{V} = \mathfrak{V}^\dagger\mathfrak{A}^\dagger\mathfrak{A}\mathfrak{V}.$$

Über die simultanen Transformationen mehrerer Matrizen gilt

Satz 111: Sind die m hermitischen oder m unitären Matrizen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_m$ alle miteinander vertauschbar, so gibt es eine unitäre Matrix $\mathfrak{U}$, so daß die Transformierten

$$\mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{A}_1\mathfrak{U}, \ldots, \mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{A}_m\mathfrak{U}$$

sämtlich Diagonalmatrizen sind.

Es soll nun noch die Eindeutigkeit der unitären Transformation am Beispiel einer hermitischen Form erläutert werden.

Entsprechend Satz 110 gilt

Satz 112: Es gibt eine unitäre Transformation $\mathfrak{x} = \mathfrak{U}\mathfrak{y}$, $\mathfrak{y} = \mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{x} = \mathfrak{U}^\dagger\mathfrak{x}$, durch welche die zur Matrix $\mathfrak{A}$ gehörige hermitische Form auf eine Summe von Quadraten gebracht wird:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = (\Lambda\,\mathfrak{y}, \mathfrak{y}), \quad \mathfrak{U}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{U} = \Lambda, \tag{33,25}$$

oder ausführlich geschrieben

$$\sum_{m,n} a_{mn}\, x_m^* x_n = \sum_k \lambda_k\, y_k\, y_k^*. \tag{33,26}$$

Das Koordinatensystem, in dem die Matrix $\mathfrak{A}$ durch die Diagonalgestalt

$$\Lambda = (\lambda_i \, \delta_{ik})$$

dargestellt wird, ist ein Hauptachsensystem.

Die Darstellung der hermitischen Form als Summe von Quadraten ist nun nicht vollständig eindeutig. Die Eigenwerte λ_k sind zwar eindeutig bestimmt, da

$$|\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E}| = 0$$

ist. Gibt es aber zwei unitäre Transformationen

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{U}_1 \mathfrak{y} \quad \text{und} \quad \mathfrak{x} = \mathfrak{U}_2 \mathfrak{y} ,$$

die die hermitische Form auf die Diagonalgestalt bringen, so muß

$$(\Lambda \mathfrak{y}, \mathfrak{y}) = (\Lambda \mathfrak{z}, \mathfrak{z}) \tag{33,27}$$

sein. Doch brauchen dazu $\mathfrak{U}_1$ und $\mathfrak{U}_2$ nicht identisch zu sein.

Eliminiert man $\mathfrak{x}$, so erhält man eine Transformation von $\mathfrak{y}$ nach $\mathfrak{z}$, die wieder unitär ist:

$$\mathfrak{y} = \mathring{\mathfrak{U}} \mathfrak{z} , \quad \mathring{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U}_1^{-1} \mathfrak{U}_2 , \quad \mathring{\mathfrak{U}} \mathring{\mathfrak{U}}^\dagger = \mathfrak{E} . \tag{33,28}$$

Dies in (33,27) eingesetzt, ergibt

$$\mathring{\mathfrak{U}}^{-1} \Lambda \mathring{\mathfrak{U}} = \Lambda \quad \text{oder} \quad \Lambda \mathring{\mathfrak{U}} - \mathring{\mathfrak{U}} \Lambda = 0 . \tag{33,29}$$

Für die Elemente ergibt das

$$(\lambda_k - \lambda_l) \, \mathfrak{u}_{kl} = 0 .$$

Sobald also zu den Indizes k, l verschiedene Eigenwerte gehören, ist $\mathfrak{u}_{kl} = 0$. Die nach der Größe geordneten verschiedenen Eigenwerte seien mit einem oberen Index r gekennzeichnet:

$$\lambda^{(1)} < \lambda^{(2)} < \cdots < \lambda^{(m)} . \qquad m < n \tag{33,30}$$

Die g_r Eigenwerte λ_k, die gleich $\lambda^{(r)}$ sind, werden durch einen zweiten Index $\varrho = 1, 2, \cdots, g_r$ bezeichnet. Dann muß $\mathring{\mathfrak{U}}$ durch Aneinanderreihen von m je g_r-reihigen Matrizen $\mathfrak{U}^{(r)}$ längs der Diagonalen entstehen, also eine unitäre Stufenmatrix

$$\mathring{\mathfrak{U}} = \begin{pmatrix} \mathfrak{U}^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathfrak{U}^{(2)} & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & \cdots & \mathfrak{U}^{(m)} \end{pmatrix} \tag{33,31}$$

darstellen. Da $\mathring{\mathfrak{U}}$ unitär in k-Dimensionen ist, sind es die $\mathfrak{U}^{(r)}$ in g_r-Dimensionen. Die unitäre Transformation (33,28) zerfällt also in m je g_r-dimensionale Transformationen, die man

$$\mathfrak{y}^{(r)} = \mathfrak{U}^{(r)} \mathfrak{z}^{(r)} \tag{33,32}$$

schreiben kann, wobei die g_r-dimensionalen Vektoren $\mathfrak{y}^{(r)}$ die Komponenten $\mathfrak{y}_1^{(r)}, \ldots, \mathfrak{y}_\varrho^{(r)}, \ldots, \mathfrak{y}_{g_r}^{(r)}$ haben.

Umgekehrt ist die Form

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k y_k y_k^* = \sum_{r=1}^{m} \lambda^{(r)} \sum_{\varrho=1}^{g_r} y_\varrho^{(r)} y_\varrho^{(r)*} \tag{33,33}$$

gegen die Transformationen (33,32) invariant.

Es gilt also

Satz 113: Die unitäre Stufenmatrix (33,31) stellt die Willkür dar, die bei Transformationen auf Hauptachsen übrig bleibt.

Jede unitäre Matrix läßt sich also unitär in eine Diagonalmatrix, und zwar in eine Phasenmatrix transformieren.

34. Orthogonale Transformationen

Sind in

$$\mathfrak{U}^\dagger \mathfrak{B} \mathfrak{U} = \mathfrak{A}$$

alle Matrizen reell, so geht die unitäre Matrix in die orthogonale über; die zugehörige Transformation heißt die orthogonale. Da $\mathfrak{U}^\dagger$ in $\overline{\mathfrak{U}}$ übergeht, läßt sich eine orthogonale Transformation durch

$$\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{U}} \mathfrak{B} \mathfrak{U} \tag{34,1}$$

darstellen.

Als Corrolar hat man: Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ orthogonal mit reellen Koeffizienten, so ist notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß

$$\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{U}} \mathfrak{B} \mathfrak{U} \qquad (\mathfrak{U} \text{ orthogonal})$$

ist

$$(\lambda \mathfrak{E} - \mathfrak{A}) = \overline{\mathfrak{U}} (\lambda \mathfrak{E} - \mathfrak{B}) \mathfrak{U}. \tag{34,2}$$

Stellt $\mathfrak{a}_1$ eine Basis dar, so lassen sich die Vektoren $\tau(\mathfrak{a}_1), \ldots, \tau(\mathfrak{a}_n)$ als Linearkombinationen der Vektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ mit reellen Koeffizienten darstellen. Die Koeffizienten dieser Linearkombinationen sind aber gerade die Elemente der Matrix von τ. Sind nun $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n$ reelle Vektoren, die ein normiertes Orthogonalsystem bilden, dann gilt

$$\mathfrak{v}_i \mathfrak{v}_k = \delta_{ik}$$

und weil $\mathfrak{v}^*_k = \mathfrak{v}_k$ ist, so ist auch $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n$ eine orthogonal-normierte Basis. Sei weiter

$$\mathfrak{B} = (b_{ik})$$

die Matrix einer orthogonalen Transformation τ bezüglich der Basis $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n$. $\mathfrak{B}$ ist dann eine orthogonale Matrix. Nun läßt sich jede orthogonale Transformation auf Diagonalgestalt bringen. Im Reellen wird sich aber die Diagonalform nur dann verwirklichen lassen, wenn die charakteristischen Wurzeln von τ sämtlich reell sind. Nun muß aber eine reelle charakteristische Wurzel λ der Gleichung $\lambda^2 = 1$

genügen, also gleich ± 1 sein. Ist daher die Diagonalgestalt im Reellen möglich, so muß sie die folgende Gestalt haben:

$$\begin{pmatrix} +1 & 0 & \dots & & & 0 \\ 0 & +1 & & & & \\ \cdot & & \ddots & & & \\ \cdot & & & +1 & & \\ \cdot & & & & -1 & \\ \cdot & & & & & \ddots \\ 0 & \dots & & & & -1 \end{pmatrix}, \tag{34,3}$$

wobei es naturgemäß vorkommen kann, daß eine der Wurzeln $+1$ oder -1 gar nicht vorkommt.

Besitzt das charakteristische Polynom $|f(\lambda)| = |\mathfrak{B} - \lambda\mathfrak{E}|$ der orthogonalen Transformation τ auch nicht reelle Wurzeln, so seien die Nullstellen $\lambda, \lambda', \dots$. Sie können angesetzt werden als

$$\begin{aligned} \lambda &= \cos\varphi - i\sin\varphi, \\ \lambda' &= \cos\varphi' - i\sin\varphi' \\ &\vdots \end{aligned}$$

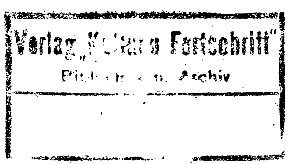
d. h. man erhält als allgemein reelle Normalform für die orthogonalen Transformationen

$$\begin{pmatrix} +1 & 0 & \dots & & \dots & & & 0 \\ 0 & +1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & +1 & & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & \begin{array}{|cc|} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{array} \\ \vdots & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & \begin{array}{|cc|} \cos\varphi' & -\sin\varphi' \\ \sin\varphi' & \cos\varphi' \end{array} \end{pmatrix} \tag{34,4}$$

In der Hauptdiagonale steht zunächst p mal $+1$, dann q mal -1. Dann folgen lauter zweireihige quadratische Kästchen der Gestalt

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \cos\varphi' & -\sin\varphi' \\ \sin\varphi' & \cos\varphi' \end{vmatrix},$$

und zwar r Kästchen mit φ, r' Kästchen mit φ', usw.



Damit haben wir eine reelle Normalform für die orthogonale Transformation τ gefunden. Als Matrix von τ bezüglich einer reellen orthogonalen normierten Basis ist (34,4) natürlich eine orthogonale Matrix, d. h. es gilt

Satz 114: Zu jeder reellen orthogonalen Matrix $\mathfrak{B}$ gibt es stets eine zweite reelle orthogonale Matrix $\mathfrak{U}$, so daß $\mathfrak{U}\mathfrak{B}\mathfrak{U}^{-1}$ gerade die Normalform (34,4) annimmt.

Die geometrische Natur von τ sei am Beispiel des affinen 3-dimensionalen R_3 erläutert. Es gibt folgende Möglichkeiten für die Normalform (34,4):

$$\text{(I)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(II)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{(III)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{(IV)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{(V)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \text{(VI)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Die Gleichungssysteme der zugehörigen Bewegungen sind

I. $\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 \\ y_3 &= x_3 \end{aligned}\right\}$ d. h. die Identität,

II. $\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 \\ y_3 &= -x_3 \end{aligned}\right\}$ d. h. Spiegelung an einer Ebene,

III. $\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= -x_2 \\ y_3 &= -x_3 \end{aligned}\right\}$ d. h. Spiegelung an einer Geraden,

IV. $\left.\begin{aligned} y_1 &= -x_1 \\ y_2 &= -x_2 \\ y_3 &= -x_3 \end{aligned}\right\}$ d. h. Spiegelung an einem Punkt,

V. $\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2\cos\varphi - x_3\sin\varphi \\ y_3 &= x_2\sin\varphi + x_3\cos\varphi \end{aligned}\right\}$ d. h. Drehung um eine Achse,

VI. $\left.\begin{aligned} y_1 &= -x_1 \\ y_2 &= x_2\cos\varphi - x_3\sin\varphi \\ y_3 &= x_2\sin\varphi + x_3\cos\varphi \end{aligned}\right\}$ d. h. Drehung um eine Achse und Spiegelung an einer zu dieser Achse senkrechten Ebene.

Die ersten vier Fälle können auch als Spezialfälle der beiden letzten aufgefaßt werden. Denn das Gleichungssystem V geht für $\varphi = 0$ über in I, für $\varphi = \pi$ in III. Substituieren wir auch in VI $\varphi = 0$ bzw. $\varphi = \pi$, so erhalten wir das Gleichungssystem II (1. Koordinate mit 3. vertauschbar!) bzw. IV. Translationen sind nicht mit berücksichtigt worden.

B. UNENDLICHE MATRIZEN

35. Allgemeines

Unter einer unendlichen Matrix versteht man ein quadratisches Schema, in welchem beide Indizes i, k von 1 bis ∞ laufen. Die früher eingeführte Bezeichnung (1,1)

$$\mathfrak{A} = (a_{ik})_{(m,n)} = (a_{ik})$$

kann nun dahingehend präzisiert werden, daß unter $(a_{ik})_{(m,n)}$ eine endliche Matrix, unter (a_{ik}) eine unendliche Matrix verstanden werden soll. Die Elemente der endlichen quadratischen Matrix $(a_{ik})_{(n,n)}$ brauchen nur für $i \leq n$, $k \leq n$ erklärt zu sein. Die quadratische Teilmatrix, bei der beide Indizes höchstens gleich q sind, heißt q-ter Abschnitt der unendlichen Matrix; er werde mit

$$\mathfrak{A}_{[q]} = (a_{ik})_{[q]}$$

bezeichnet.

Die Definitionen und Regeln für das Rechnen mit endlichen quadratischen Matrizen übertragen sich nur mit Einschränkungen. Damit z. B. nach

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \left(\sum_{\nu} a_{i\nu} b_{\nu k}\right)$$

das Produkt gebildet werden kann, ist die Konvergenz aller vorkommenden Summen erforderlich. Nullmatrix und Einheitsmatrix sind entsprechend den endlichen Matrizen definiert.

Der Determinantenbegriff hat bei unendlichen Matrizen i. a. keinen Sinn. Ist

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & & \end{vmatrix}$$

eine doppelreihige unendliche Anordnung und ist

$$A_1 = a_{11},\ A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots,\ A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

dann ist $(A_n)_{n\to\infty}$ die Determinante, falls sie existiert. Sind $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}$ und $\prod\limits_{i=1}^{\infty} a_{ii}$ beide konvergent, so heißt die Determinante normal. Für normale Determinanten gelten die entsprechenden Sätze wie für endliche Determinanten.

Das Verhalten endlicher und unendlicher Matrizen sei an einem Beispiel näher erläutert. Gefragt ist: Gibt es zwei Matrizen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ derart, daß

$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q} - \mathfrak{Q}\mathfrak{P} = \mathfrak{E} \qquad (35,1)$$

ist? Im Falle endlicher Matrizen ist wegen (11,4)

$$Sp\,[\mathfrak{P}\mathfrak{Q}] = 0,$$

d. h. (35,1) läßt sich nicht erfüllen; wohl ist es aber im Falle unendlicher Matrizen möglich; denn dann macht es einen Unterschied aus, ob bei der Bildung von $\sum_{i,k=1}^{\infty} p_{i\nu} q_{\nu k}$ zuerst über i und dann über k summiert wird.

Beispiel: Es sei

$$\mathfrak{P} = \begin{pmatrix} 0 & p_{12} & 0 & 0 & \dots \\ p_{21} & 0 & p_{23} & 0 & \\ 0 & p_{32} & 0 & p_{34} & \\ 0 & 0 & p_{43} & 0 & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} 0 & q_{12} & 0 & 0 & \dots \\ q_{21} & 0 & q_{23} & 0 & \\ 0 & q_{32} & 0 & q_{34} & \\ 0 & 0 & q_{43} & 0 & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix};$$

dann ist $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} - \mathfrak{Q}\mathfrak{P} = \mathfrak{E}$

$$= \begin{pmatrix} p_{12}q_{21} - p_{21}q_{12} & 0 & p_{12}q_{23} - p_{23}q_{12} & 0 & \dots \\ 0 & (p_{21}q_{12} + p_{23}q_{32}) - (p_{12}q_{21} + p_{32}q_{23}) & 0 & p_{23}q_{34} - p_{34}q_{23} & \\ p_{32}q_{21} - p_{21}q_{32} & 0 & (p_{32}q_{23} + p_{34}q_{43}) - (p_{23}q_{32} + p_{43}q_{34}) & 0 & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix} \tag{35,2}$$

Da die Diagonalelemente dieser Matrix gleich 1 sein müssen, während alle übrigen Elemente verschwinden, lassen sich aus diesen Bedingungen Wertekombinationen p_{ik}, q_{ik} angeben, die (35,1) erfüllen, wie z. B.

$$p_{12} = q_{12} = 1, \quad p_{23} = q_{23} = 1, \quad p_{34} = q_{34} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}, \quad p_{32} = -q_{32} = -1,$$
$$p_{21} = -q_{21} = -\tfrac{1}{2}, \quad p_{43} = -q_{43} = -\sqrt{\tfrac{3}{2}}, \dots$$

Läge dagegen z. B. die endliche (3,3)-Matrix vor, so wäre $p_{34} = p_{43} = q_{34} = q_{43} = 0$ zu setzen. Die Diagonalelemente (35,2) müßten dann die Bedingungsgleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} p_{12}q_{21} - p_{21}q_{12} &= 1, \\ (p_{21}q_{12} + p_{23}q_{32}) - (p_{12}q_{21} + p_{32}q_{23}) &= 1, \\ p_{32}q_{23} - p_{23}q_{32} &= 1. \end{aligned} \tag{35,3}$$

Diese Gleichungen sind aber nicht miteinander vereinbar, wie durch Einsetzen der 1. und 3. Gleichung (35,3) in die 2. ergibt.

Die unendlichen Matrizen sind erstmalig im Zusammenhang mit der Theorie der Integralgleichungen durch HILBERT behandelt worden, und zwar benutzte HILBERT beschränkte Matrizen. Eine wesentliche Erweiterung des Kalküls der unendlichen Matrizen brachte erst die Quantenmechanik, die die Existenz auch nichtbeschränkter Matrizen forderte. In den folgenden Ziffern wird daher eine kurze Behandlung der wichtigsten Eigenschaften beschränkter, halbbeschränkter und nichtbeschränkter Matrizen gegeben werden.

36. Beschränkte Matrizen

a) Vollstetige Bilinearformen

Es seien $x_1, x_2, \dots$; $y_1, y_2, \dots$ Wertsysteme von abzählbar unendlich vielen reellen Veränderlichen, die stets eine konvergente, nicht über 1 gelegene Quadratsumme besitzen:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \leq 1, \quad \sum_{i=1}^{\infty} y_i^2 \leq 1. \tag{36,1}$$

Bilinearformen der beiden Reihen von Veränderlichen heißt dann die analog (32,5) durch die unendliche Doppelfolge der Koeffizienten a_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, \infty)$ zunächst rein formal bestimmte Doppelreihe

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik} x_i y_k = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + \cdots \\ + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_2 y_2 + \cdots \\ \vdots \tag{36,2}$$

Werden die Veränderlichen $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots; y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots$ gleich 0 gesetzt, so entsteht die dem n-ten Abschnitt zugehörige endliche Bilinearform

$$(\mathfrak{A}_{[n]} \mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k . \tag{36,3}$$

Die Bilinearform (36,2) heißt vollstetig, wenn die Differenz $(\mathfrak{A}_{[n]} \mathfrak{x}, \mathfrak{y}) - (\mathfrak{A}_{[m]} \mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ mit wachsendem n und m gleichmäßig für alle (36,1) genügenden Wertsysteme gegen Null konvergiert, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $N(\varepsilon)$, so daß

$$|(\mathfrak{A}_{[n]} \mathfrak{x}, \mathfrak{y}) - (\mathfrak{A}_{[m]} \mathfrak{x}, \mathfrak{y})| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m > N(\varepsilon). \tag{36,4}$$

Dann konvergiert
$$\lim_{n\to\infty} (\mathfrak{A}_{[n]} \mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \tag{36,5}$$

gleichmäßig für alle (36,1) genügenden Wertsysteme und definiert den Wert $(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der Bilinearform (36,2).

Jedes Wertsystem $x_1, x_2, \ldots$ kann durch einen Punkt x des ∞-dimensionalen Raumes R_∞ repräsentiert werden. Bedeutet $x_i^{(\nu)}, y_i^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ eine unendliche Folge von (36,1) genügenden Wertsystemen, die mit $\nu \to \infty$ für jeden Index i gegen ein ebenfalls (36,1) genügendes Wertsystem konvergieren:

$$\lim_{\nu\to\infty} x_i^{(\nu)} = x_i, \quad \lim_{\nu\to\infty} y_i^{(\nu)} = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{36,6}$$

so ergibt sich
$$\lim_{\nu\to\infty} (\mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(\nu)}, \mathfrak{y}^{(\nu)}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{y}). \tag{36,7}$$

Entsprechend der Bilinearform ist auch die Linearform definiert:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i . \tag{36,8}$$

Diese Linearform heißt entsprechend (36,4) vollstetig, wenn es für alle (36,1) genügenden x_i und zu jedem $\varepsilon > 0$ es eine Zahl $N(\varepsilon)$ gibt, so daß

$$|(\mathfrak{A}_{[n]} \mathfrak{x}) - (\mathfrak{A}_{[m]} \mathfrak{x})| < \varepsilon \quad \text{für alle } n, m > N(\varepsilon). \tag{36,9}$$

Da wegen der CAUCHY-LAGRANGEschen Ungleichung

$$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \tag{36,10}$$

ist, so wird (36,9)

$$|(\mathfrak{A}_{[n]} \mathfrak{x}) - (\mathfrak{A}_{[m]} \mathfrak{x})| = \left|\sum_{i=m+1}^{n} a_i x_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=m+1}^{n} a_i^2}\,.$$

Andererseits wird die hiermit gegebene Schranke für

$$x_i = a_i \left(\sum_{i=m+1}^{n} a_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$$

erreicht. Es ist also $(\mathfrak{A}\mathfrak{x})$ dann und nur dann vollstetig, wenn die Quadratsumme der Koeffizienten $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ konvergiert; (36,8) konvergiert dann absolut.

Setzt man in $(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ alle Veränderlichen der einen Reihe bis auf eine gleich 0, so wird sie eine vollstetige Linearform der anderen Variablenreihe; notwendige Bedingung für die Vollstetigkeit einer Bilinearform bzw. der ihr zugehörigen Matrix ist also die Konvergenz der Quadratsumme der Koeffizienten jeder einzelnen Zeile und Spalte:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{1k}^2, \ \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k}^2, \ \ldots; \ \sum_{i=1}^{\infty} a_{i1}^2, \ \sum_{i=1}^{\infty} a_{i2}^2, \ \ldots \tag{36,11}$$

konvergent. Wenn man andererseits (36,6) auf eine Folge von Wertsystemen anwendet, bei denen jeweils nur eine Zahl $x_i^{(\nu)}$ und $y_k^{(\nu)}$ gleich 1, alle anderen 0 sind, und i und k mit $\nu \to \infty$ konvergieren, so ist für jedes i $\lim_{\nu\to\infty} x_i^{(\nu)} = \lim_{\nu\to\infty} y_i^{(\nu)} = 0$ und daher

$$\lim_{\nu\to\infty} (\mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(\nu)}, y^{(\nu)}) = \lim_{\nu\to\infty} a_{i_\nu k_\nu} = 0 .$$

Eine weitere notwendige Bedingung für die Vollstetigkeit ist also das Verschwinden des Doppellimes:

$$\lim_{i,k\to\infty} a_{ik} = 0 . \tag{36,12}$$

Da (36,11) und (36,12) nicht gleichzeitig erfüllt zu sein brauchen, ist keine der beiden Bedingungen hinreichend für Vollstetigkeit.

Eine hinreichende Bedingung ist die Konvergenz der Quadratsumme aller Koeffizienten a_{ik}:

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}^2 \tag{36,13}$$

konvergent.

Durch wiederholte Anwendung der CAUCHYschen Ungleichung folgt nämlich

$$\begin{aligned}
\left((\mathfrak{A}_{[n]}\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) - (\mathfrak{A}_{[m]}\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\right)^2 = \Big(& x_1 \sum_{k=m+1}^{n} a_{1k} y_k + \cdots + x_m \sum_{k=m+1}^{n} a_{mk} y_k \\
&+ x_{m+1} \sum_{k=1}^{n} a_{m+1,k} y_k + \cdots + x_n \sum_{k=1}^{n} a_{nk} y_k \Big)^2
\end{aligned}$$

$$\leq \left(\sum_{k=m+1}^{n} a_{1k} y_k \right)^2 + \cdots + \left(\sum_{k=m+1}^{n} a_{mk} y_k \right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{m+1,k} y_k \right)^2 + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{n} a_{nk} y_k \right)^2$$

$$\leq \sum_{k=m+1}^{n} a_{1k}^2 + \cdots + \sum_{k=m+1}^{n} a_{mk}^2 + \sum_{k=1}^{n} a_{m+1,k}^2 + \cdots + \sum_{k=1}^{n} a_{nk}^2$$

und das wird als Rest der Reihe (36,13) mit wachsendem n, m beliebig klein.

Aus (36,4) und (36,5) ergibt sich unmittelbar die Existenz einer Schranke M, unterhalb der die Absolutwerte sämtlicher Abschnitte und die Werte der vollstetigen Bilinearformen bleiben, wenn die Nebenbedingung (36,1) für die Veränderlichen erfüllt ist:

$$|(\mathfrak{A}_{[n]}\,\mathfrak{x}, \mathfrak{y})| \leq M, \quad |(\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}, \mathfrak{y})| \leq M. \tag{36,14}$$

Vollstetige Bilinearformen sind also im HILBERTschen Sinne beschränkt, wenn sie wie folgt definiert werden.

Definition 45: Eine Matrix reeller Größen a_{ik} oder die aus ihnen (rein formal) gebildete Bilinearform von unendlichen vielen Veränderlichen

$$(\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}\, x_i\, y_k$$

heißt beschränkt, wenn eine nicht nur von den x_i, y_k, sondern auch von n unabhängige positive Größe M existiert, so daß für jedes n und für solche $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_n$, deren Quadratsumme $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1$, $\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq 1$ sind, der absolute Betrag des n-ten Abschnittes der unendlichen Bilinearform

$$\left|\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\, x_i\, y_k\right| \leq M$$

ist, oder – was auf dasselbe hinauskommt – wenn eine nicht nur von den x_i, y_k, sondern auch von n unabhängige positive Größe M existiert, so daß für jedes n und beliebige $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_n$

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_i\, y_k\right| \leq M \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

ist.

b) Konvergenzfragen

Satz 115: Eine Linearform $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{x})$ von unendlich vielen Veränderlichen ist dann und nur dann beschränkt, wenn die Quadratsumme ihrer Koeffizienten $a_1^2 + a_2^2 + \ldots$ konvergiert. Wegen der SCHWARZschen Ungleichung $\left|\sum_i u_i v_i\right| \leq \sqrt{\sum_i u_i^2}\sqrt{\sum_i v_i^2}$ konvergiert also die Linearform für jedes Wertsystem $x_1, x_2, \ldots$ von konvergenter Quadratsumme. $M = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots}$ ist die genaue obere Grenze ihrer Werte für alle solche Wertsysteme $x_1, x_2, \ldots,$ deren Quadratsumme ≤ 1 ist.

Satz 116: Die Quadratsumme der Größen irgendeiner Zeile oder auch irgendeiner Spalte aus dem Koeffizientenschema einer beschränkten Bilinearform konvergiert und liegt ihrem absoluten Werte nach unter dem Quadrat M^2 der oberen Grenze M der Bilinearform selbst.

Beweis: Es sei zunächst $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$, dagegen $x_1, y_1, y_2, \ldots, y_n \neq 0$, dann ist

$$|a_{11}\, x_1\, y_1 + \cdots + a_{1n}\, x_1\, y_n| \leq M \sqrt{x_1^2}\sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}$$

oder

$$|a_{11}\, y_1 + \cdots + a_{1n}\, y_n| \leq M \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2},$$

d. h. $a_{11} y_1 + \cdots + a_{1n} y_n$ ist eine beschränkte Linearform der unendlich vielen Veränderlichen $y_1, y_2, \ldots$ Wegen Satz 115 ist daher $a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots \leq M^2$. Wie die Konvergenz der Quadratsumme der Elemente der 1. Zeile ergibt sich auch die jeder anderen Zeile und Spalte.

Satz 117: Eine beschränkte Bilinearform konvergiert für alle Wertsysteme ihrer beiden Variablenreihen und konvergenten Quadratsummen $x_1^2 + x_2^2 + \cdots$; $y_1^2 + y_2^2 + \cdots$ zeilenweise im Sinne der zeilenweisen Konvergenz einer Doppelreihe, d. h. es konvergiert die Summe jeder einzelnen Zeile und daher auch die Summe der Zeilensummenwerte:

$$|(\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}, \mathfrak{y})| \leq M \sqrt{\sum_i x_i^2} \sqrt{\sum_k y_k^2}\,.$$

Satz 118: Eine beschränkte Bilinearform konvergiert für alle Wertsysteme ihrer beiden Variablenreihen abschnittsweise im Sinne der abschnittsweisen Konvergenz einer Doppelreihe, und zwar gegen denselben Wert wie die zeilenweise Summation, d. h. es existiert der Limes

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik} x_i y_k \right) = \lim_{n \to \infty} (\mathfrak{A}_{[n]}\,\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = (\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\,.$$

Satz 119: Analog zu Satz 117 und 118 konvergiert eine beschränkte Bilinearform auch spaltenweise und gegen denselben Wert wie im Sinne abschnittsweiser Konvergenz. Sie konvergiert also zeilenweise und spaltenweise gegen denselben Wert $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$, gegen den auch die Abschnitte konvergieren.

c) Hilbertsche Faltungssätze

Satz 120: (1. Faltungssatz). Die Faltung zweier beschränkter Bilinearformen $\mathfrak{A} = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik} x_i y_k$ und $\mathfrak{B} = \sum_{i,k=1}^{\infty} b_{ik} x_i y_k$ ist wieder beschränkt:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C} = \sum_{i,k=1}^{\infty} c_{ik} x_i y_k = \sum_{i,k=1}^{\infty} \left(\sum_{\nu} a_{i\nu} b_{\nu k} \right) x_i y_k\,. \tag{36,15}$$

(2. Faltungssatz). Für drei beschränkte Bilinearformen

$$\mathfrak{A} = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik} x_i y_k\,, \qquad \mathfrak{B} = \sum_{i,k=1}^{\infty} b_{ik} x_i y_k\,, \qquad \mathfrak{C} = \sum_{i,k=1}^{\infty} c_{ik} x_i y_k$$

gilt die Beziehung

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) = (\mathfrak{A}\mathfrak{B})\,\mathfrak{C} \tag{36,16}$$

(vgl. Gleichung (4,6)).

Außer dem assoziativen Gesetz (36,16) gilt ebenfalls das distributive Gesetz (vgl. Gleichung (4,4) und (4,5))

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathfrak{A}\mathfrak{C}\,. \tag{36,17}$$

d) Spezielle Formen und Matrizen

Definition 46: Eine quadratische Form von unendlich vielen Veränderlichen

$$(\mathfrak{A}\,\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik} x_i x_k \tag{36,18}$$

heißt beschränkt, wenn eine von $x_1, x_2, \ldots$ und von n unabhängige positive Größe M existiert, so daß für alle $x_1, \ldots, x_n$ deren Quadratsumme ≤ 1, und für jedes n

$$\left| \sum_{i,k=1} a_{ik}\, x_i\, x_k \right| \leq M \sqrt{\sum_i x_i^2}$$

ist. Mit der quadratischen Form ist naturgemäß eine Bilinearform verbunden, nämlich ihre sogenannte „Polarform" $(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}\, x_i\, y_k$. Und jede Bilinearform ist umgekehrt auf diese Art an eine quadratische Form geknüpft, wenn ihre Koeffizienten die Symmetriebedingung $a_{ik} = a_{ki}$ erfüllen.

Satz 121: Ist die quadratische Form beschränkt, so ist es auch ihre Polarform.

Definition 47: Eine Bilinearform mit komplexen Koeffizienten

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} c_{ik}\, x_i\, y_k = \sum_{i,k=1}^{\infty} (a_{ik} + i\, b_{ik})\, x_i\, y_k \,^{*)} \tag{36,19}$$

heißt beschränkt, wenn eine von den Veränderlichen und von n unabhängig positive Größe M existiert, so daß

$$\left| \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}\, x_i\, y_k \right| \leq M$$

ist für alle x_i, y_k, die den Bedingungen

$$x_1 x_1^* + \cdots + x_n x_n^* = | x_1 |^2 + \cdots + | x_n |^2 \leq 1,$$
$$y_1 y_1^* + \cdots + y_n y_n^* = | y_1 |^2 + \cdots + | y_n |^2 \leq 1$$

genügen.

Satz 122: Eine Bilinearform mit komplexen Koeffizienten

$$\mathfrak{C} = \sum_{i,k=1}^{\infty} c_{ik}\, x_i\, y_k = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}\, x_i\, y_k + i \sum_{i,k=1}^{\infty} b_{ik}\, x_i\, y_k = \mathfrak{A} + i\, \mathfrak{B}$$

ist dann und nur dann beschränkt, wenn reeller und imaginärer Bestandteil einzeln im Sinne reeller Bilinearformen beschränkt sind.

Definition 48: Eine hermitische Form von unendlich vielen Veränderlichen

$$(\mathfrak{H}\mathfrak{x}, \mathfrak{x}^*) = \sum_{i,k=1}^{\infty} h_{ik}\, x_i\, x_k^* = \sum_{i,k=1}^{\infty} (s_{ik} + i\, t_{ik})\, x_i\, x_k^* = \mathfrak{S} + i\, \mathfrak{T}, \tag{36,20}$$

wo also $h_{ik} = h_{ki}^*$, $s_{ik} = s_{ki}$, $t_{ik} = -t_{ki}$ ist, heißt beschränkt, wenn eine von den Veränderlichen und von n unabhängige positive Größe M existiert, so daß

$$\left| \sum_{i,k=1}^{n} h_{ik}\, x_i\, x_k^* \right| \leq M$$

falls $x_1 x_1^* + \cdots + x_n x_n^* \leq | x_1 |^2 + \cdots + | x_n |^2 \leq 1$ ist.

Satz 123: Ist die hermitische Form $\sum_{i,k=1}^{\infty} h_{ik}\, x_i\, x_k^*$ beschränkt, so ist es auch die zugehörige Bilinearform $\sum_{i,k=1}^{\infty} h_{ik}\, x_i\, x_k$ und beide haben genau dieselbe obere Grenze.

---

*) Man beachte die doppelte Bedeutung von i!

Unitäre Matrizen sind beschränkt, aber nicht vollstetig, da wegen $\mathfrak{U}\mathfrak{U}^* = \mathfrak{E}$ das Produkt einer vollstetigen Matrix in eine beschränkte stets vollstetig ist und daher nicht die Einheitsmatrix sein kann.

e) Reziproke unendliche Matrizen

Die notwendige Bedingung für die Existenz der Reziproken einer endlichen Matrix war, daß ihre Determinante $|\mathfrak{A}| \neq 0$ war und daß die Existenz einer linken Inversen die einer rechten Inversen bedingt. Das ist nicht notwendig bei Matrizen unendlicher Ordnung, wie aus folgendem Beispiel ersehen werden kann.

B e i s p i e l: Gegeben sei

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \vdots & \cdot & & \cdot & \\ \vdots & & \cdot & & \cdot \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}.$$

Bildet man die Rechtsinverse, so ist zwar $\mathfrak{A}\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$, aber sie ist nicht eindeutig, da die x_i willkürlich sind, d. h. die Gleichung $\mathfrak{A}\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ hat unendlich viele Lösungen! Andererseits hat für jedes $\mathfrak{Y}$ $\mathfrak{Y}\mathfrak{A}$ nur Nullen in der 1. Spalte, d. h. $\mathfrak{Y}\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$ ist unlösbar.

Es bestehen nun folgende Sätze:

S a t z 124: Besitzt eine beschränkte Matrix sowohl eine vordere als auch eine hintere beschränkte Reziproke, sind also die beiden Gleichungen $\mathfrak{A}\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{Y}\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$ lösbar, so sind die Lösungen beider einander gleich und also die einzigen.

B e w e i s: Aus $\mathfrak{A}\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{Y}\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$ folgt durch vordere Multiplikation mit $\mathfrak{Y}$ bzw. hintere Multiplikation mit $\mathfrak{X}$

$$\mathfrak{Y}(\mathfrak{A}\mathfrak{X}) = \mathfrak{Y}, \quad (\mathfrak{Y}\mathfrak{A})\mathfrak{X} = \mathfrak{X}, \quad \text{d. h. } \mathfrak{Y} = \mathfrak{X}.$$

S a t z 125: Besitzt eine beschränkte Matrix eine und nur eine hintere Reziproke, so ist diese zugleich auch vordere, und also auch die einzige.

B e w e i s: Es sei $\mathfrak{X}$ die hintere Reziproke, $\mathfrak{A}\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{X}\mathfrak{A} = \mathfrak{U}$. Dann folgt $(\mathfrak{A}\mathfrak{X})\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ oder auch $\mathfrak{A}\mathfrak{U} = \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}) = 0$. Daher ist mit $\mathfrak{X}$ zugleich $\mathfrak{X} + (\mathfrak{E} - \mathfrak{U})$ eine hintere Reziproke von $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{X} + \mathfrak{E} - \mathfrak{U}) = \mathfrak{A}\mathfrak{X} + \mathfrak{A}(\mathfrak{E} - \mathfrak{U}) = \mathfrak{E} + 0 = \mathfrak{E}.$$

Die vorausgesetzte Eindeutigkeit der hinteren Reziproken gibt

$$\mathfrak{X} + \mathfrak{E} - \mathfrak{U} = \mathfrak{X} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{U} = \mathfrak{E}, \text{ d. h. } \mathfrak{X}\mathfrak{A} = \mathfrak{E}.$$

Bezüglich der Bildung der Reziproken bestehen also folgende Möglichkeiten:

1. $\mathfrak{A}$ hat eine einzige beschränkte Reziproke, vorn und hinten dieselbe, die alsdann durch $\mathfrak{A}^{-1}$ bezeichnet werden darf.
2. $\mathfrak{A}$ hat weder vordere noch hintere Reziproke.
3. $\mathfrak{A}$ hat keine vordere, aber unendlich viele hintere Reziproken.
4. $\mathfrak{A}$ hat keine hintere, aber unendlich viele vordere Reziproken.

Bei endlichen Matrizen kommen die Fälle 3 und 4 nicht vor.

f) Transformationen der unendlichen Matrizen

Die affine Transformation

$$\xi_j = \sum_{i=1}^{\infty} b_{ji} x_i \quad (j = 1, 2 \ldots) \tag{36,21}$$

heißt eine orthogonale Transformation der unendlich vielen Veränderlichen, wenn ihre Koeffizienten den beiden Serien von Orthogonalitätsbedingungen genügen:

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_{ji} b_{li} = \delta_{jl}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} b_{ji} b_{jk} = \delta_{ik}. \tag{36,22}$$

Sie ordnet jedem Wertsystem $x_1, x_2, \ldots$ von konvergenter Quadratsumme ein Gleichungssystem $\xi_1, \xi_2, \ldots$ von konvergenter und gleicher Quadratsumme zu:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2. \tag{36,23}$$

Umgekehrt wird dabei jedes Wertsystem ξ_j von konvergenter Quadratsumme aus genau einem solchen Wertsystem x_i erhalten:

$$x_i = \sum_{j=1}^{\infty} b_{ji} \xi_j. \tag{36,24}$$

Dies ist gleichfalls eine orthogonale Transformation mit dem transponierten Koeffizientenschema. Die Aufeinanderfolge zweier orthogonaler Transformationen ist wieder eine orthogonale Transformation.

Die vollstetige quadratische Form $(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{x})$ geht durch die orthogonale Transformation wiederum in eine vollstetige quadratische Form der neuen Veränderlichen über:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = \sum_{j,l=1}^{\infty} \left(\sum_{i,k=1}^{\infty} b_{ji} a_{ik} b_{lk} \right) \xi_j \xi_l = (\mathfrak{A}'\xi, \xi) \tag{36,25}$$

d. h. die Transformationsmatrix lautet

$$\mathfrak{A}' = \overline{\mathfrak{B}}\mathfrak{A}\mathfrak{B} \tag{36,26}$$

(vgl. Gleichung (32,10)).

Die Operation der Faltung ist orthogonalen Transformationen gegenüber kovariant, die Spuren der Form sind, falls sie absolut konvergieren, Invarianten:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ii} = \sum_{i=1}^{\infty} a'_{ii}, \quad \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik}^2 = \sum_{i,k=1}^{\infty} a'^2_{ik}. \tag{36,27}$$

Bei endlicher Variablenzahl ist es immer möglich, eine Matrix orthogonal auf eine Summe von Quadraten zu transformieren, d. h. die Hauptachsentransformation durchzuführen.

Jede vollstetige quadratische Form läßt sich ebenfalls auf die Normalform bringen, und zwar so, daß $\mathfrak{A}' = \overline{\mathfrak{B}}\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ eine Diagonalmatrix darstellt; die Diagonalelemente sind die Eigenwerte der Matrix; ihre Gesamtheit bildet das Spektrum der Matrix, und zwar ist, wie bei endlichen Matrizen das Spektrum als die Gesamtheit derjenigen Parameterwerte erklärt, für welche es keine eindeutige und beschränkte Reziproke (Resolvente) gibt.

Bei unendlichen Matrizen kann es nun — außer bei vollstetigen beschränkten Matrizen – vorkommen, daß das Spektrum außer dem diskontinuierlichen Wertebereich (Punktspektrum) auch einen kontinuierlichen Wertebereich (Streckenspektrum) enthält, der als Integralbestandteil bei der Transformation in Erscheinung tritt. Ist z. B. die hermitische Form

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} h_{ik}\, x_i\, x_k^*$$

gegeben [vgl. Gleichung (32,8)], so gibt es eine orthogonale Transformation, die diese Form überführt in

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} h_{ik}\, x_i\, x_k^* = \sum_{i=1}^{\infty} w_i\, y_i\, y_i^* + \int w(\varphi)\, y(\varphi)\, y^*(\varphi)\, d\varphi\,. \tag{36,28}$$

Entsprechendes gilt für unitäre Matrizen. Im Gegensatz zu den endlichen Matrizen, die eine diskrete Reihe der Eigenwerte aufweisen (Diagonalmatrix), gibt es also unendliche unitäre Matrizen, die durch keine unitäre Transformation auf die Diagonalform gebracht werden können. Punktspektrum und Streckenspektrum können eventuell übereinandergreifen, erschöpfen jedoch noch nicht immer das Spektrum. Da nämlich das Punktspektrum im allgemeinen nicht abgeschlossen ist, so kann es Häufungsstellen haben, die weder dem Punktspektrum noch dem Streckenspektrum angehören. Die Gesamtheit der (eventuellen) Häufungsstellen des Punktspektrums, die auch dem Punkt-, aber auch dem Streckenspektrum angehören können, nennen wir Häufungsspektrum.

Entartete Systeme werden dadurch charakterisiert sein, daß mehrfache Eigenwerte vorkommen. Die Mehrfachheit der Eigenwerte wird dann das statistische Gewicht des betreffenden Zustandes angeben.

Als Beispiel sei nun eine unitäre Matrix betrachtet, die außer einem Punktspektrum nur ein einfaches Streckenspektrum besitzt (Wintner). Bezeichnet $\varrho(\mu)$ eine für $0 \leq \mu \leq 2\pi$ erklärte, reellwertige, monoton nicht abnehmende, von links stetige Funktion, die keine Treppenfunktion ist, d. h. mindestens abzählbar unendlich viele Nichtkonstanzstellen hat, so kann man nach dem Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren auf genau eine Weise zu jedem $n \geq 1$ ein trigonometrisches ganzes Polynom

$$X_n(\mu) = \sum_{m=0}^{l=1} \gamma_m^{(n)}\, e^{im\mu}\,, \quad \gamma_{n-1}^{(n)} > 0\,, \quad m \geq 0$$

derart bestimmen, daß

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X_p(\mu)\, X_q^*(\mu)\, d\varrho(\mu) = \delta_{pq}$$

ist (Stieltjessche Integrale), also für ein beliebiges trigonometrisches ganzes Polynom

$$\Theta_l(\mu) = \sum_{m=0}^{l-1} C_m\, e^{im\mu}\,, \; C_{l-1} \neq 0$$

offenbar $$\int_0^{2\pi} \Theta_l(\mu)\, X_n(\mu)\, d\varrho(\mu) = \int_0^{2\pi} \Theta_l(\mu)\, X_n^*(\mu)\, d\varrho(\mu) = 0\,, \; l \neq n$$

und $$\int_0^{2\pi} \Theta_l(\mu)\, X_l(\mu)\, d\varrho(\mu) \neq 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \Theta_l(\mu)\, X_l^*(\mu)\, d\varrho(\mu) \neq 0$$

und daher insbesondere in der Matrix $\mathfrak{Z} = (z_{pq})$, $z_{pq} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\mu} X_p(\mu)\, X_q^*(\mu)\, d\varrho(\mu)$ ersichtlich $z_{pq} = 0$ für $|p-q| > 1$, $z_{pq} \neq 0$ für $|p-q| = 1$, $z_{pp} =$ oder $\neq 0$ gilt. Diese Matrix ist unitär und kann außer einem Punktspektrum nur ein einfaches Streckenspektrum besitzen.

37. Halbbeschränkte Matrizen

Ist eine Bilinearform $(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_{ik} x_i y_k$ gegeben, so sei $\boldsymbol{r}(\mathfrak{A})$ die obere Grenze des absoluten Betrages von $(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$. Die Beschränktheit von $(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ besagt, daß $\boldsymbol{r}(\mathfrak{A})$ endlich ist. Die Form, die aus $(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ durch Kopplung $\mathfrak{y} = \mathfrak{x}^*$ entsteht, möge „Kopplungsform von $\mathfrak{A}$" genannt werden: $(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{x}^*)$. Ist $\boldsymbol{m}(\mathfrak{A})$ die obere Grenze, $\boldsymbol{n}(\mathfrak{A})$ die untere Grenze des absoluten Betrages von $(\mathfrak{A}\mathfrak{x}, \mathfrak{x}^*)$, so ist $\boldsymbol{m}(\mathfrak{A}) \leq \boldsymbol{r}(\mathfrak{A})$.

Es sei nun $\mathfrak{A}$ eine positiv definite, sonst aber beliebige hermitische Matrix, d. h. es wird vorausgesetzt, daß alle Eigenwerte der Abschnitte von $\mathfrak{A}$ oberhalb einer positiven unteren Schranke $\boldsymbol{n}(\mathfrak{A})$ liegen, so ist

$$0 < \boldsymbol{n}(\mathfrak{A}) \leq \boldsymbol{n}(\mathfrak{A}_{[n]}) \leq \lambda_\nu^{(n)} \leq \boldsymbol{m}(\mathfrak{A}_{[n]}) \leq \boldsymbol{m}(\mathfrak{A}) \leq +\infty, \tag{37,1}$$

wobei die $\lambda_\nu^{(n)}$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$ die Eigenwerte $\mathfrak{A}_{[n]}$ bezeichnen. Da die Determinante $|\mathfrak{A}_{[n]}|$ das Produkt der Eigenwerte, also $\neq 0$ ist, so ist die Reziproke $(\mathfrak{A}_{[n]})^{-1}$ vorhanden. Nun ist wegen Satz 111 $\lim_{n\to\infty} \mathfrak{A}_{[n]} = \mathfrak{A}$.

$\mathfrak{A}$ ist also eine beschränkte Matrix, für die die Beziehung gilt:

$$-\infty < \boldsymbol{n}(\mathfrak{A}) \leq \boldsymbol{m}(\mathfrak{A}) < +\infty.$$

Das Abschnittsspektrum, d. h. die Gesamtheit der $\lambda_\nu^{(n)}$, kann durch ein endliches Intervall $\boldsymbol{n}(\mathfrak{A}) \leq \lambda \leq \boldsymbol{m}(\mathfrak{A})$ überdeckt werden. Es wird dann die Matrix halbbeschränkt genannt, wenn das Abschnittsspektrum von einer passenden Halbgeraden überdeckt wird. Es gilt dann entweder

$$-\infty \leq \boldsymbol{n}(\mathfrak{A}) \leq \boldsymbol{m}(\mathfrak{A}) < +\infty, \quad \boldsymbol{m}(\mathfrak{A}) \gtreqless 0 \tag{37,2}$$

oder

$$-\infty < \boldsymbol{n}(\mathfrak{A}) \leq \boldsymbol{m}(\mathfrak{A}) \leq +\infty, \quad \boldsymbol{n}(\mathfrak{A}) \gtreqless 0; \tag{37,3}$$

denn es ist ja $\boldsymbol{n}(\mathfrak{A}_{[n]})$ der kleinste, $\boldsymbol{m}(\mathfrak{A}_{[n]})$ der größte Eigenwert von $\mathfrak{A}_{[n]}$ und

$$\boldsymbol{n}(\mathfrak{A}) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{n}(\mathfrak{A}_{[n]}), \quad \boldsymbol{m}(\mathfrak{A}) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{m}(\mathfrak{A}_{[n]}),$$

wobei $+\infty$ und $-\infty$ als Grenzwerte zugelassen sind.

Über den Endpunkt des Abschnittsspektrums gilt folgender

Satz 126: Der Endpunkt des Abschnittsspektrums einer halbbeschränkten Matrix gehört dem Spektrum an.

Im Fall (37,2) soll also z. B. der Punkt $\mu = \boldsymbol{m}(\mathfrak{A})$ des Abschnittsspektrums zugleich ein Punkt des Spektrums sein.

Beweis: Für eine positiv definite Matrix n-ter Ordnung $\mathfrak{C}_{(n)}$ und ihre Reziproke $\mathfrak{C}_{(n)}^{-1}$ gilt: $1 = \boldsymbol{n}(\mathfrak{C}_{(n)}) \cdot \boldsymbol{m}(\mathfrak{C}_{(n)}^{-1})$, da die Eigenwerte ($> 0$) von $\mathfrak{C}_{(n)}$ die reziproken Eigenwerte (> 0) von $\mathfrak{C}_{(n)}^{-1}$ sind, so daß der kleinste Eigenwert $\boldsymbol{n}(\mathfrak{C}_{(n)})$ von $\mathfrak{C}_{(n)}$ der reziproke Wert des größten Eigenwertes $\boldsymbol{m}(\mathfrak{C}_{(n)}^{-1})$ von $\mathfrak{C}_{(n)}^{-1}$ sein muß. Unter der Annahme von (37,2) werde nun gesetzt

$$\lambda^* = \boldsymbol{m}(\mathfrak{A}) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{37,4}$$

Die Eigenwerte von $\mathfrak{A}_{[n]}$ sind $\lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)}$, also sind die Eigenwerte von $(\lambda^* \mathfrak{A} - \mathfrak{E})$ offenbar $\lambda^* - \lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda^* - \lambda_n^{(n)}$. Die größte unter den n-Zahlen $\lambda_\nu^{(n)}$ ist

$$\boldsymbol{m}(\mathfrak{A}_{[n]}) \leq \boldsymbol{m}(\mathfrak{A}) < \lambda^*,$$

so daß die Eigenwerte von $\lambda^* \mathfrak{E}_{[n]} - \mathfrak{A}_{[n]}$ durchweg positiv sind, und zwar ist der kleinste Eigenwert $\boldsymbol{n}(\lambda^* \mathfrak{E}_{[n]} - \mathfrak{A}_{[n]})$ gleich $\lambda^* - \boldsymbol{m}(\mathfrak{A}_{[n]})$. Wenn nun $\mathfrak{C}_{(n)} = \lambda^* \mathfrak{E}_{[n]} - \mathfrak{A}_{[n]}$ gesetzt wird, so ist $\mathfrak{C}_{(n)}^{-1} = \big(\mathfrak{R}_{ik}^{(n)}(\lambda^*)\big)_{(n)}$, wobei $\big(\mathfrak{R}_{ik}(\lambda^*)\big)_{(n)}$ die Reziproke des n-ten Abschnitts der positiv definiten Matrix $\lambda^* \mathfrak{E} - \mathfrak{A}$ ist. Daher folgt

$$1 = [\lambda^* - \boldsymbol{m}(\mathfrak{A}_{[n]})]\, \boldsymbol{m}\big((\mathfrak{R}_{ik}^{(n)}[\lambda^*])_{(n)}\big),$$

da ja $1 = \boldsymbol{n}(\mathfrak{C}_{(n)}) \cdot \boldsymbol{m}(\mathfrak{C}_{(n)}^{-1})$ gilt. Nimmt man nun den Grenzübergang $n \to \infty$ vor, so wird wegen (37,4) und wegen $\boldsymbol{m}(\mathfrak{A}_{[n]}) \to \boldsymbol{m}(\mathfrak{A}) < +\infty$:

$$1 = \varepsilon \lim_{n \to \infty} \boldsymbol{m}\big((\mathfrak{R}_{ik}^{(n)}[\lambda^*])_{(n)}\big). \tag{37,5}$$

Nun ist

$$\lim_{n \to \infty} \boldsymbol{m}\big((\mathfrak{R}_{ik}^{(n)}[\lambda^*])_{(n)}\big) = \boldsymbol{m}\big((\mathfrak{R}_{ik}[\lambda^*])\big), \tag{37,6}$$

und wird dies in (37,5) eingesetzt und der Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ vorgenommen, so ergibt sich:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \boldsymbol{m}\big((\mathfrak{R}_{ik}[\lambda^*])\big) = +\infty, \tag{37,7}$$

d. h. die Grenzresolvente $\big(\lim \mathfrak{R}_{ik}^{(n)}(\lambda)\big) = \big(\mathfrak{R}_{ik}(\lambda)\big)$ ist wohl für $\lambda > \boldsymbol{m}(\mathfrak{A})$ beschränkt, sie wird aber nicht beschränkt, wenn $\lambda \to \boldsymbol{m}(\mathfrak{A}) + 0$ geht. Für den Punkt $\mu = \boldsymbol{m}(\mathfrak{A})$ kann es aber keine Umgebung

$$\boldsymbol{m}(\mathfrak{A}) - \eta < \mu\, \boldsymbol{m}(\mathfrak{A}) + \eta$$

geben, auf der jedes Element der Grenzspektralmatrix $\sigma_{ik}(\mu)$ konstant wäre, es muß also $\mu = \boldsymbol{m}(\mathfrak{A})$ dem Spektrum angehören; denn es wäre mit $\eta > 0$

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} \mathfrak{R}_{ik}(\lambda)\, x_i x_k^* = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d \sum\limits_{i,k=1}^{\infty} \sigma_{ik}(\mu)\, x_i x_k^*}{\lambda - \mu} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d \sum\limits_{i,k=1}^{\infty} \sigma_{ik}(\mu)\, x_i x_k^*}{\eta} \leq \eta^{-1},$$

sobald nur λ von $\boldsymbol{m}(\mathfrak{A})$ um weniger als η entfernt wäre. Es bliebe also $\big(\mathfrak{R}_{ik}(\lambda)\big)$ für $\lambda \to \boldsymbol{m}(\mathfrak{A}) + 0$ beschränkt, was im Widerspruch zu (37,7) stünde.

Liegt z. B. ein wasserstoffähnliches Spektrum vor, so müssen die Endpunkte des Spektrums und des Abschnittsspektrums identisch sein. Das Spektrum ist dabei als die Gesamtheit derjenigen Stellen μ_0 definiert, zu welchen es kein $\varepsilon > 0$ gibt, derart daß in dem Intervall $|\mu - \mu_0| < \varepsilon$ jedes $\sigma_{ik}(\mu) = \sigma_{ik}(\mu_0) = \text{const}$ ist, wobei also $(\sigma_{ik}(\mu))$ irgendeine Grenzspektralmatrix bedeutet.

Die Behauptung, daß eine Matrix (a_{ik}) halbbeschränkt ist, bedeutet ja, daß die hermitische Form

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\, x_i\, x_k^* = \sum_{i,k=1}^{m} \int_0^{+\infty} \mu\, d\,\sigma_{ik}(\mu)\, x_i\, x_k^* \tag{37,8}$$

nicht negativ definit ist.

Nun ist aber $\sum_{i,k=1}^{\infty} \sigma_{ik}(\mu)\, x_i\, x_k^*$ eine nicht abnehmende Funktion von μ. Setzt man $x_1 = 0$ für $i > m$, so folgt, daß auch die Abschnittsform $\sum_{i,k=1}^{m} \sigma_{ik}(\mu)\, x_i\, x_k^*$ nicht abnehmend und daher

$$\int_0^{\infty} \mu\, d \sum_{i,k=1}^{m} \sigma_{ik}(\mu)\, x_i\, x_k^*$$

gewiß $\geqq 0$, d. h. die Form (37,8) nicht negativ definit ist.

Es ist naturgemäß dabei nicht verlangt, daß die volle Halbgerade $\mu \leqq m(\mathfrak{A})$ bzw. $\mu \geqq n(\mathfrak{A})$ vom Abschnittsspektrum oder vom Spektrum bedeckt sein soll, so daß Spektrumslücken, wie z. B. zwischen den Balmertermen, erlaubt sind.

38. Nichtbeschränkte Matrizen

Da es im Rahmen dieser Schrift nicht möglich ist, eine vollständige Theorie der nichtbeschränkten Matrizen zu entwickeln, sei nur ein Beispiel herausgegriffen, an dem die Besonderheiten nichtbeschränkter Matrizen erläutert werden sollen: die quadratische Form; denn die allgemeine Theorie ist wesentlich komplizierter als die Theorie beschränkter Matrizen. Zudem treten Konvergenzschwierigkeiten und Beschränkungen auf, die der Theorie beschränkter Matrizen völlig fremd sind.

Ist die hermitische Form $\sum_{i,k=1}^{\infty} h_{ik}\, x_i\, x_k^*$ gegeben, so kann der Fall eintreten, daß diese Form nicht durch orthogonale Transformationen auf die Gestalt $\sum_k w_k\, y_k\, y_k^*$ überführt werden kann. Dann ist in Analogie zu den Ergebnissen der beschränkten Formen anzunehmen, daß es eine Darstellung mit kontinuierlichem Spektrum

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} h_{ik}\, x_i\, x_k^* = \sum_k w_k\, y_k\, y_k^* + \int w(\varphi)\, y(\varphi)\, y^*(\varphi)\, d\varphi \tag{38,1}$$

[vgl. Gleichung (36,28)] gibt, bei der die ursprünglichen Variablen durch eine „orthogonale Transformation“ mit neuen Variablen $y(k)$, $y(\varphi)$ zusammenhängen.

Legt man nun die linearen Gleichungen [vgl. (32,15)]

$$w\, x_j = \sum_l h_{jl}\, x_l = 0 \tag{38,2}$$

zugrunde, so wird der Fall eines Integralbestandteils dann auftreten, wenn es außer diskreten Werten w_k noch ein Kontinuum solcher Werte bzw. eine oder mehrere Strecken der w-Achse gibt. Wenn es für irgendeinen Punkt w dieses Kontinuums eine Lösung $x_l(w)$ gibt, so gelten für zwei solche Lösungen w' und w'' die Gleichungen:

$$\begin{aligned} w' x_j(w') &= \sum_l h_{jl} x_l(w') = 0 , \\ w'' x_j(w'') &= \sum_l h_{jl} x_l(w'') = 0 . \end{aligned} \tag{38,3}$$

Daraus folgt wegen des hermitischen Charakters von h

$$(w' - w'') \sum_j x_j(w') x_j(w'') = 0 \tag{38,4}$$

[vgl. Gleichung (32,16)].

Versucht man zu diesen Orthogonalitätsrelationen die Normierungsbedingung $\sum_j |x_j(w)|^2 = 1$ hinzuzufügen, so erkennt man, daß die Funktion der zwei Veränderlichen $\sum_j x_j(w') x_j(w'')$ unstetig wäre, falls sie überhaupt existierte. In Wirklichkeit existiert sie aber nicht, da die Summe nicht konvergiert. Daher wird folgende Normierung durchgeführt. Man setzt

$$\sum_j \left| \int x_j(w)\, dw \right|^2 = \varphi(w) . \tag{38,5}$$

Die Funktion ist monoton und i. a. auch konvergent. Sie wird nach Hellinger „Basisfunktion" genannt. Seien nun Δ_1 und Δ_2 irgend zwei Intervalle des Streckenspektrums, Δ_{12} das ihnen gemeinsame Teilstück, dann gilt

$$\sum_j \int_{\Delta_1} x_j(w')\, dw' \cdot \int_{\Delta_2} x_j(w'')\, dw'' = \int_{\Delta_{12}} d\varphi(w) = \varphi(w^{(2)} - w^{(1)}) , \tag{38,6}$$

wobei $w^{(1)}$ und $w^{(2)}$ die Endpunkte von Δ_{12} sind.

Wenn man sich nun die Intervalle Δ_1, Δ_2, Δ_{12} sehr klein denkt, so kann man symbolisch mit den Größen $x_j(w)\, dw$ als „Differentiallösungen" von (38,2) rechnen. Diese Differentiallösungen sind dann in gewöhnlicher Weise orthogonal, aber nicht auf 1, sondern auf das Differential der Basisfunktion normiert.

Damit läßt sich aus der Gesamtheit der diskreten Werte x_{ji} und der in einem Index diskret, im anderen kontinuierlich verteilten $x_j(w)$ die „orthogonale" Matrix gewinnen:

$$(x_{ji}, x_j(w)\, dw) = \begin{pmatrix} ij \rightarrow & & \\ \downarrow & \cdots\cdot & \\ & \vdots & \\ w & ||||| & \\ \downarrow & & \end{pmatrix} . \tag{38,7}$$

Die Orthogonalitäts- und Normierungsgleichungen für die ganze Matrix zerfallen in vier verschiedene Typen:

$$\begin{aligned} &\sum_j x_{ji} x_{jk}^* = \delta_{ik} , \qquad &&\sum_j x_{jk} x_j^*(w)\, dw = 0 , \\ &\sum_j x_j(w)\, dw\, x_{jk}^* = 0 , \qquad &&\sum_j x_j(w')\, dw'\, x_j^*(w'')\, dw'' = d\varphi . \end{aligned} \tag{38,9}$$

Die Orthogonalitätsrelationen für die Kolonnen lauten

$$\sum_k x_{jk} x_{lk}^* + \int \frac{x_j(w)\,dw\, x_l^*(w)\,dw}{d\varphi} = \delta_{jl}. \qquad (38,10)$$

Setzt man nun

$$y_k = \sum_j x_{jk} x_j, \quad y(\varphi)\,d\varphi = \sum_j x_j(w)\,dw \cdot x_j, \qquad (38,11)$$

so folgt

$$\sum_k w_k y_k y_k^* + \int w(\varphi)\, y(\varphi)\, y^*(\varphi)\, d\varphi = \sum_{j,l} h_{jl} x_j x_l^*, \qquad (38,12)$$

womit die Hauptachsentransformation durchgeführt ist.

C. ANWENDUNGEN

I. Elektrotechnische Anwendungen

39. Vierpolmatrizen (Feldtkeller)

a) Allgemeines

Eine elektrische Schaltung zur Übertragung elektrischer Leistung heißt Vierpol. Die technisch wichtigsten Vierpole der Nachrichtentechnik sind:

1. Doppelleitungen aller Art,
2. drahtlose Strecken einschließlich Sender- und Empfangsantennen,
3. Übertrager,
4. Siebschaltungen,
5. Verstärker,
6. Dämpfungs- und Phasenentzerrer.

Die allgemeine Form der Vierpolgleichungen mit 4 verschiedenen voneinander unabhängigen Vierpolkonstanten lautet

$$\begin{aligned} U_1 &= W_{11} J_1 + W_{12} J_2, \\ U_2 &= W_{21} J_1 + W_{22} J_2. \end{aligned} \qquad (39,1)$$

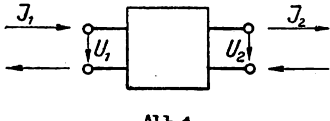


Abb. 1

Die W_{ik} sind Widerstände und haben folgende Bedeutung:

$$\mathfrak{W} = \begin{pmatrix} \text{Eingangs-Leerlaufwiderstand} & -\text{Kernwiderstand rückwärts} \\ \text{Kernwiderstand vorwärts} & -\text{Ausgangs-Leerlaufwiderstand} \end{pmatrix}.$$

Dabei versteht man unter Kernwiderstand denjenigen Widerstand, mit dem man den eintretenden Strom multiplizieren muß, um die Ausgangsleerlaufspannung zu erhalten.

Werden die Ströme als Funktionen der Spannungen dargestellt, so entsteht das Gleichungspaar

$$\begin{aligned} J_1 &= Y_{11} U_1 + Y_{12} U_2 \\ J_2 &= Y_{21} U_1 + Y_{22} U_2 . \end{aligned} \tag{39,2}$$

Die Y_{ik} sind Leitwerte mit der Bedeutung

$$\mathfrak{Y} = \begin{pmatrix} \text{Eingangs-Kurzschlußleitwert} & -\text{Kernleitwert rückwärts} \\ \text{Kernleitwert vorwärts} & -\text{Ausgangs-Kurzschlußleitwert} \end{pmatrix}.$$

Die Darstellung der Eingangsgrößen als Funktionen der Ausgangsgrößen liefert

$$\begin{aligned} U_1 &= A_{11} U_2 + A_{12} J_2, \\ J_1 &= A_{21} U_2 + A_{22} J_2 \end{aligned} \tag{39,3}$$

mit der Bedeutung

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} (\text{Leerlaufspannungsübersetzung})^{-1} & (\text{Kernleitwert})^{-1} \\ (\text{Kernwiderstand})^{-1} & (\text{Kurzschlußstromübersetzung})^{-1} \end{pmatrix}.$$

Und schließlich ergibt die Darstellung der Eingangsspannung und des Ausgangsstromes als Funktionen der anderen Größen

$$\begin{aligned} U_1 &= D_{11} U_2 + D_{12} J_1 , \\ J_2 &= D_{21} U_2 + D_{22} J_1 . \end{aligned} \tag{39,4}$$

Die verschiedenen Paare der Vierpolgleichungen lassen sich nun als Matrizengleichungen schreiben.

Statt (39,1) $$\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ U_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ J_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{39,5}$$

Statt (39,2) $$\begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ J_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ U_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{39,6}$$

Statt (39,3) $$\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ J_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 & 0 \\ J_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{39,7}$$

Statt (39,4) $$\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ J_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 & 0 \\ J_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{39,8}$$

Die Matrix $\mathfrak{W}$ heißt Widerstandsmatrix, $\mathfrak{Y}$ Leitwertsmatrix, $\mathfrak{A}$ Kettenmatrix, $\mathfrak{D}$ Reihen-Parallelmatrix.

Der Vorteil der Matrizenschreibweise liegt in folgendem:

Man kann

1. bequem von einem Gleichungspaar zum anderen übergehen, ohne unnütze Zwischenrechnungen zu machen,

2. mit den Schaltungen selbst rechnen, statt wie bei den KIRCHHOFFschen Gleichungen, mit den Strömen und Spannungen,
3. die Theorie der Netzwerke organisch, übersichtlich und vollständig aufbauen.

Zwischen den Elementen der Vierpolmatrizen bestehen folgende Beziehungen:

$$\mathfrak{W} = \begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathfrak{Y}|}\begin{pmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{A_{21}}\begin{pmatrix} A_{11} & -|\mathfrak{A}| \\ 1 & -A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{D_{21}}\begin{pmatrix} -|\mathfrak{D}| & D_{11} \\ -D_{22} & 1 \end{pmatrix}, \quad (39,9)$$

$$\mathfrak{Y} = \frac{1}{|\mathfrak{W}|}\begin{pmatrix} W_{22} & -W_{12} \\ -W_{21} & W_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{A_{12}}\begin{pmatrix} A_{22} & -|\mathfrak{A}| \\ 1 & -A_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{D_{12}}\begin{pmatrix} 1 & -D_{11} \\ D_{22} & -|\mathfrak{D}| \end{pmatrix}, \quad (39,10)$$

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{W_{21}}\begin{pmatrix} W_{11} & -|\mathfrak{W}| \\ 1 & -W_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{Y_{21}}\begin{pmatrix} -Y_{22} & 1 \\ -|\mathfrak{Y}| & Y_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{D_{22}}\begin{pmatrix} |\mathfrak{D}| & D_{12} \\ -D_{21} & 1 \end{pmatrix}, \quad (39,11)$$

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{W_{22}}\begin{pmatrix} W_{12} & |\mathfrak{W}| \\ 1 & -W_{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{Y_{11}}\begin{pmatrix} -Y_{12} & 1 \\ |\mathfrak{Y}| & Y_{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{A_{22}}\begin{pmatrix} |\mathfrak{A}| & A_{12} \\ -A_{21} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}. \quad (39,12)$$

b) Reihenschaltung von Vierpolen

Die Vierpolgleichung (39,5) kann auch abgekürzt geschrieben werden

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{W} \cdot \mathfrak{J}; \quad (39,13)$$

sie stellt äußerlich das OHMsche Gesetz dar. Sollen nun zwei Vierpole hintereinandergeschaltet werden, so müssen die $\mathfrak{W}$-Matrizen addiert werden, genau so, wie bei der Hintereinanderschaltung zweier Zweipole die Scheinwiderstände addiert werden.

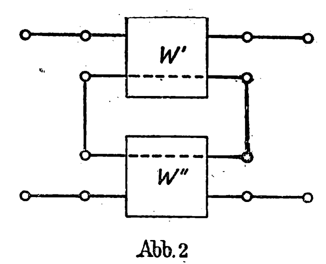


Abb. 2

Gilt für den einen Vierpol

$$\mathfrak{U}' = \mathfrak{W}' \cdot \mathfrak{J}',$$

für den anderen

$$\mathfrak{U}'' = \mathfrak{W}'' \cdot \mathfrak{J}'',$$

so folgt wegen $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}''$ für die Reihenschaltung

$$\mathfrak{U}' + \mathfrak{U}'' = (\mathfrak{W}' + \mathfrak{W}'') \cdot \mathfrak{J}. \quad (39,14)$$

c) Parallelschaltung von Vierpolen

Die Leitwertform des OHMschen Gesetzes $J = \frac{U}{W}$ entspricht wegen (39,6) der Form der Vierpolgleichungen

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{Y}\mathfrak{U}.$$

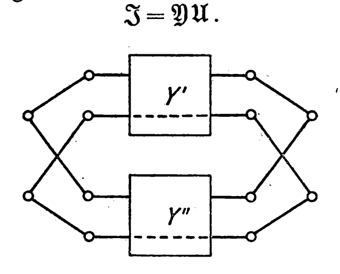


Abb. 3

Bei der Parallelschaltung von Vierpolen addieren sich die Leitwertsmatrizen (vgl. Addition der Leitwerte von Zweipolen). Sind die Leitwertsmatrizen zweier Vierpole, deren Ein- und Ausgänge parallel geschaltet sind (Abb. 3) $\mathfrak{Y}'$ und $\mathfrak{Y}''$, so wird, da die Eingangs- und Ausgangsspannung beider gleich sind, mit

$$\mathfrak{J}' = \mathfrak{Y}'\mathfrak{U}, \quad \mathfrak{J}'' = \mathfrak{Y}''\mathfrak{U}$$

für die Parallelschaltung

$$\mathfrak{J}' + \mathfrak{J}' = (\mathfrak{Y}' + \mathfrak{Y}'')\,\mathfrak{U}. \tag{39,15}$$

d) Kettenschaltung von Vierpolen

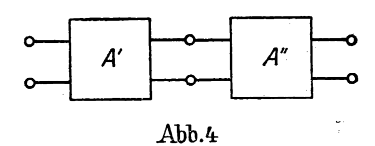


Abb. 4

Der erste der beiden Vierpole Abb. 4 habe entsprechend (39,7) die Gleichung

$$\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ J_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 & 0 \\ J_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{39,16}$$

Da die Ausgangsgrößen U_2 und J_2 zugleich die Eingangsgrößen des folgenden Vierpols sind, wird

$$\begin{pmatrix} U_2 & 0 \\ J_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A''_{11} & A''_{12} \\ A''_{12} & A''_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_3 & 0 \\ J_3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{39,17}$$

(39,17) in (39,16) eingesetzt, liefert

$$\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ J_1 & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{A}' \cdot \mathfrak{A}'' \cdot \begin{pmatrix} U_3 & 0 \\ J_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{39,18}$$

d. h. bei der Kettenschaltung zweier Vierpole multiplizieren sich ihre Kettenmatrizen

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' \mathfrak{A}''. \tag{39,19}$$

Da die Matrizenmultiplikation nicht kommutativ ist, so muß man die Faktoren in derselben Reihenfolge wählen, in der die Vierpole aufeinanderfolgen. Eine Vertauschung der Reihenfolge der Vierpole bedeutet zugleich eine Vertauschung der Reihenfolge der Kettenmatrizen. Die Ungültigkeit des kommutativen Gesetzes der Matrizenmultiplikation gewinnt somit eine anschauliche elektrische Deutung.

e) Reihen-Parallelschaltung von Vierpolen

Die Reihen-Parallelschaltung wird gebraucht, wenn zwei Vierpole gleiche Ausgangsspannungen haben sollen (d. h. ihre Ausgänge parallel geschaltet werden

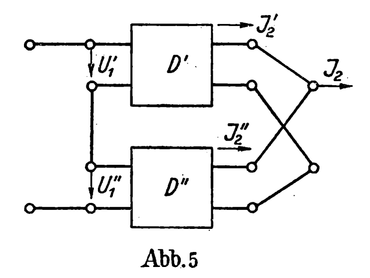


Abb. 5

müssen) und ihre Eingangsströme gleich sein sollen (d. h. die Eingänge in Reihe geschaltet sein müssen).

Für den einen Vierpol ist

$$\begin{pmatrix} U_1' & 0 \\ J_2' & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{D}' \begin{pmatrix} U_2 & 0 \\ J_1 & 0 \end{pmatrix},$$

für den anderen

$$\begin{pmatrix} U_1'' & 0 \\ J_2'' & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{D}'' \begin{pmatrix} U_2 & 0 \\ J_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Vierpolgleichungen der Schaltung Abb. 5 sind daher

$$\begin{pmatrix} U_1' + U_1'' & 0 \\ J_2' + J_2'' & 0 \end{pmatrix} = (\mathfrak{D}' + \mathfrak{D}'') \begin{pmatrix} U_2 & 0 \\ J_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{39,20}$$

d. h. die Reihen-Parallelmatrizen sind zu addieren

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}' + \mathfrak{D}''. \tag{39,21}$$

Sollen umgekehrt die Eingänge zweier Vierpole parallel und die Ausgänge in Reihe geschaltet werden, so müssen die reziproken Reihen-Parallelmatrizen $\mathfrak{D}^{-1}$ addiert werden; sie mögen als Parallel-Reihenmatrizen bezeichnet werden.

40. Matrizen einfacher Netzwerke

Die Matrix verwickelter Schaltungen läßt sich aus der Matrix ihrer Schaltelemente nach den Regeln der Vierpoltheorie berechnen. Unter der Voraussetzung, daß die Netzwerke nur aus linearen Widerständen r_n mit den Leitwerten g_n bestehen, ergeben sich folgende Schaltungen:

a) Vierpole aus einem Widerstand

Die Vierpolgleichungen Abb. 6 lauten

$$\begin{aligned} U_1 &= U_2 + r_1 J_2 \\ J_1 &= J_2 \end{aligned} \tag{40,1}$$

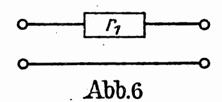


Abb.6

oder

$$\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ J_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 & 0 \\ J_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{40,2}$$

Die Matrizengleichung hat die Form (39,7). Die Kettenmatrix ist daher

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & r_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{40,3}$$

Nach (39,9), (39,10), (39,12) berechnet sich mit $g_1 = (r_1)^{-1}$:

$$\mathfrak{W} = (\infty), \quad \mathfrak{Y} = \begin{pmatrix} g_1 & -g_1 \\ g_1 & -g_1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 1 & r_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{40,3'}$$

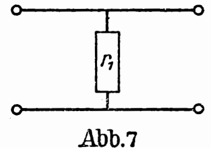


Abb.7

Für den Vierpol Abb. 7 gelten die Vierpolgleichungen

$$\begin{aligned} U_1 &= U_2 \\ J_1 &= g_1 U_2 + J_2 \end{aligned} \tag{40,4}$$

oder

$$\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ J_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 & 0 \\ J_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{40,5}$$

Die zugehörige Kettenmatrix ist also

$$\mathfrak{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ g_1 & 1\end{pmatrix} \tag{40,6}$$

und es wird weiterhin

$$\mathfrak{W}=\begin{pmatrix}r_1 & -r_1\\ r_1 & -r_1\end{pmatrix},\quad \mathfrak{Y}=(\infty),\quad \mathfrak{D}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -g_1 & 1\end{pmatrix}. \tag{40,6'}$$

b) Vierpole mit zwei verschiedenen Widerständen

Die Schaltungen Abb. 8 bzw. Abb. 9 gehen aus den Schaltungen Abb. 6 bzw. Abb. 7 durch Kettenschaltung hervor. Ihre Kettenmatrizen entstehen also durch Multiplikation der Kettenmatrizen (40,3) und (40,6).



Abb. 8 Abb. 9

Für die Schaltung nach Abb. 8 ergibt sich

$$\mathfrak{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ g_1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & r_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & r_2\\ g_1 & g_1 r_2+1\end{pmatrix},\quad \mathfrak{W}=\begin{pmatrix}r_1 & -r_1\\ r_1 & -(r_1+r_2)\end{pmatrix},\quad \mathfrak{Y}=\begin{pmatrix}g_1+g_2 & -g_2\\ g_2 & -g_2\end{pmatrix}, \tag{40,7}$$

für die Schaltung nach Abb. 9

$$\mathfrak{A}=\begin{pmatrix}1 & r_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ g_1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+r_1 g_2 & r_1\\ g_2 & 1\end{pmatrix},\quad \mathfrak{W}=\begin{pmatrix}r_1+r_2 & -r_2\\ r_2 & -r_2\end{pmatrix},\quad \mathfrak{Y}=\begin{pmatrix}g_1 & -g_1\\ g_1 & -(g_1+g_2)\end{pmatrix}. \tag{40,8}$$

Abb. 10

Eine Schaltung Abb. 10 nennt man eine symmetrische *T*-Schaltung. Die Kettenmatrix läßt sich nach (40,8) und (40,3) berechnen als Produkt der beiden Kettenmatrizen

$$\mathfrak{A}=\begin{pmatrix}1+r_1 g_2 & r_1\\ g_2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & r_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=g_2\begin{pmatrix}r_1+r_2 & r_1(r_1+2r_2)\\ 1 & r_1+r_2\end{pmatrix}, \tag{40,9}$$

daher folgt

$$\mathfrak{W}=\begin{pmatrix}r_1+r_2 & -r_2\\ r_2 & -(r_1+r_2)\end{pmatrix},\quad \mathfrak{Y}=\frac{g_1}{r_1+2r_2}\begin{pmatrix}r_1+r_2 & -r_2\\ r_2 & -(r_1+r_2)\end{pmatrix}. \tag{40,9'}$$

Eine Schaltung Abb. 11 dagegen nennt man eine symmetrische Π-Schaltung. Ihre Kettenmatrix folgt aus (40,6) und (40,7).

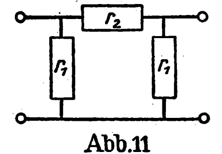


Abb. 11

Also wird

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & r_2 \\ g_1 & g_1 r_2 + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 + g_2 & 1 \\ g_1 (g_1 + 2 g_2) & g_1 + g_2 \end{pmatrix} \tag{40,10}$$

und weiterhin

$$\mathfrak{W} = \frac{r_1}{g_1 + 2 g_2} \begin{pmatrix} g_1 + g_2 & -g_2 \\ g_2 & -(g_1 + g_2) \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{Y} = \begin{pmatrix} g_1 + g_2 & -g_2 \\ g_2 & -(g_1 + g_2) \end{pmatrix}. \tag{40,10'}$$

Entsprechende andere Zusammenstellungen lassen sich leicht aus den Elementarschaltungen angeben.

41. Übertrager

Als ein Beispiel aus der Hochfrequenztechnik werde der Übertrager behandelt. Gegeben seien zwei Übertrager I und II (Abb. 12), zwischen deren Primär- und Sekundärspulen die Kopplungen k_1 und k_2 seien. Gefragt ist nach der resultierenden Kopplung k', d. h. derjenigen, die zwischen dem Eingang AB und dem Ausgang CD gemessen wird, als Funktion der in der Abb. angegebenen Größen.

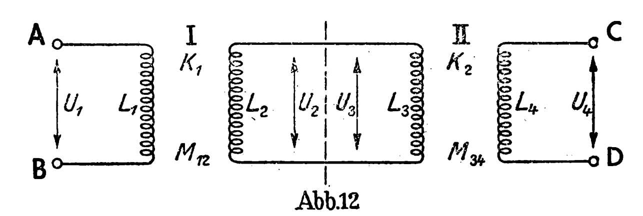


Abb. 12

Für den Übertrager I bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} U_1 &= J_1 \mathfrak{R}_1 - \mathfrak{M}_{12} J_2, \\ U_2 &= J_1 \mathfrak{M}_{12} - \mathfrak{R}_2 J_2, \end{aligned} \tag{41,1}$$

oder in Matrizenform

$$\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ U_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{R}_1 & -\mathfrak{M}_{12} \\ \mathfrak{M}_{12} & -\mathfrak{R}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ J_2 & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{W}_1 \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ J_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{41,2}$$

$\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ sind dabei die Scheinwiderstände der Primär- bzw. Sekundärspule, $\mathfrak{M}_{12}$

der Scheinwiderstand der Gegeninduktivität $\mathfrak{M}_{12}$. Wegen (39,11) kann (41,2) umgeformt werden in

$$\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ J_1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathfrak{M}_{12}} \begin{pmatrix} \mathfrak{R}_1 & -|\mathfrak{W}_1| \\ 1 & \mathfrak{R}_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 & 0 \\ J_2 & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{A}_1 \begin{pmatrix} U_2 & 0 \\ J_2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{41,3}$$

Die Matrix $\mathfrak{A}$ ist die Kettenmatrix der Vierpoltheorie.

Für den Übertrager II gelten die entsprechenden Gleichungen

$$\begin{pmatrix} U_3 & 0 \\ J_3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathfrak{M}_{34}} \begin{pmatrix} \mathfrak{R}_3 & -|\mathfrak{W}_2| \\ 1 & \mathfrak{R}_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_4 & 0 \\ J_4 & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{A}_2 \begin{pmatrix} U_4 & 0 \\ J_4 & 0 \end{pmatrix}. \tag{41,4}$$

Da bei der Hintereinanderschaltung der Übertrager I und II die Eingangsspannung (-strom) von II gleich der Ausgangsspannung (-strom) von I ist, wird

$$U_2 = U_3, \qquad J_2 = J_3.$$

Daher folgt

$$\begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ J_1 & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \begin{pmatrix} U_4 & 0 \\ J_4 & 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{A}' \begin{pmatrix} U_4 & 0 \\ J_4 & 0 \end{pmatrix} \tag{41,5}$$

mit

$$\mathfrak{A}' = \frac{1}{\mathfrak{M}_{12}\mathfrak{M}_{34}} \begin{pmatrix} \mathfrak{R}_1(\mathfrak{R}_2+\mathfrak{R}_3) - \mathfrak{M}_{12}^2 & \mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_4(\mathfrak{R}_2+\mathfrak{R}_3) - \mathfrak{R}_1\mathfrak{M}_{34}^2 - \mathfrak{R}_4\mathfrak{M}_{12}^2 \\ \mathfrak{R}_2+\mathfrak{R}_3 & \mathfrak{R}_4(\mathfrak{R}_2+\mathfrak{R}_3) - \mathfrak{M}_{34}^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\mathfrak{R}_2+\mathfrak{R}_3}{\mathfrak{M}_{12}\cdot\mathfrak{M}_{34}} \begin{pmatrix} \mathfrak{R}_1 - \dfrac{\mathfrak{M}_{12}^2}{\mathfrak{R}_2+\mathfrak{R}_3} & \mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_4 - \dfrac{\mathfrak{R}_1\mathfrak{M}_{34}^2 + \mathfrak{R}_4\mathfrak{M}_{12}^2}{\mathfrak{R}_2+\mathfrak{R}_3} \\ 1 & \mathfrak{R}_4 - \dfrac{\mathfrak{M}_{34}^2}{\mathfrak{R}_2+\mathfrak{R}_3} \end{pmatrix}. \tag{41,6}$$

Wenn man die entsprechenden Größen des Ersatzübertragers mit $\mathfrak{R}_1^*$, $\mathfrak{R}_2^*$, $\mathfrak{M}^*$ bezeichnet, so ergibt ein Vergleich von (41,6) mit (41,3)

$$\mathfrak{R}_1^* = \mathfrak{R}_1 - \frac{\mathfrak{M}_{12}^2}{\mathfrak{R}_2+\mathfrak{R}_3}, \quad \mathfrak{R}_2^* = \mathfrak{R}_4 - \frac{\mathfrak{M}_{34}^2}{\mathfrak{R}_2+\mathfrak{R}_3}, \quad \mathfrak{M}^* = \frac{\mathfrak{M}_{12}\mathfrak{M}_{34}}{\mathfrak{R}_2+\mathfrak{R}_3}. \tag{41,7}$$

Sind nun die induktiven Widerstände $i w L$ sowie die Gegeninduktivitäten $i w M$ gegeben, so folgt unter der Voraussetzung, daß die Dämpfung der einzelnen Spulen vernachlässigt werden kann, für die Ersatzinduktivitäten

$$L_1^* = L_1 - \frac{M_{12}^2}{L_2+L_3}, \quad L_2^* = L_4 - \frac{M_{34}^2}{L_2+L_3}, \quad M^* = \frac{M_{12}M_{34}}{L_2+L_3} \tag{41,8}$$

und daher wegen

$$K^* = \frac{M^*}{\sqrt{L_1^* L_2^*}} \tag{41,9}$$

für die resultierende Kopplung mit $\lambda = \frac{L_2}{L_3}$:

$$K^* = \frac{K_1 K_2}{\sqrt{\lambda(1-K_1^2) + \frac{1}{\lambda}(1-K_2^2) + K_1^2K_2^2 - K_1^2 - K_2^2 + 2}}. \tag{41,10}$$

42. Hauptachsentransformation der Vierpole

Die nun durchzuführende Aufgabe sei, die Kettenmatrix auf Hauptachsen zu transformieren, d. h. die Darstellung zu gewinnen

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{S}\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{T}, \tag{42,1}$$

wobei $\mathfrak{K}$ eine Diagonalmatrix und

$$\mathfrak{S}\,\mathfrak{T} = \mathfrak{E} \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{T}\,\mathfrak{S} = \mathfrak{E} \tag{42,2}$$

ist. Für die Elemente folgt daher

$$t_{11} = \frac{s_{22}}{|\mathfrak{S}|}, \quad t_{12} = -\frac{s_{12}}{|\mathfrak{S}|}, \quad t_{21} = -\frac{s_{21}}{|\mathfrak{S}|}, \quad t_{22} = \frac{s_{11}}{|\mathfrak{S}|}. \tag{42,3}$$

Wird (42,1) rechts mit $\mathfrak{S}$ multipliziert, so wird

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{S} = \mathfrak{S}\,\mathfrak{K}, \tag{42,4}$$

was gleichbedeutend ist mit den 4 Gleichungen für die Elemente:

$$\begin{aligned} A_{11}\,s_{11} + A_{12}\,s_{21} &= s_{11}\,k_1, \qquad & A_{21}\,s_{11} + A_{22}\,s_{21} &= s_{21}\,k_1, \\ A_{11}\,s_{12} + A_{12}\,s_{22} &= s_{12}\,k_2, \qquad & A_{21}\,s_{12} + A_{22}\,s_{22} &= s_{22}\,k_2. \end{aligned} \tag{42,5}$$

k_1 und k_2 sind dabei die Wurzeln der Säkulargleichung

$$\begin{vmatrix} A_{11} - k & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - k \end{vmatrix} = 0, \tag{42,6}$$

$$k_{1,2} = \tfrac{1}{2}(A_{11} + A_{22}) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(A_{11} - A_{22})^2 + A_{12}\,A_{21}}. \tag{42,7}$$

Durch die Bestimmung der Eigenwerte k_1, k_2 ist daher die Diagonalmatrix völlig bestimmt. Die Matrix $\mathfrak{S}$ kann dagegen aus den Gleichungen (42,5) nicht eindeutig bestimmt werden, da zwei ihrer Elemente willkürlich bleiben.

Entsprechend ergibt sich für die Eigenwerte l_1, l_2 einer Widerstandsmatrix

$$l_{1,2} = \tfrac{1}{2}(W_{11} + W_{22}) \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(W_{11} - W_{22})^2 + W_{12}\,W_{21}}. \tag{42,8}$$

Da jeder Vierpol durch die Angabe von 4 Größen bestimmt ist, kann er durch die Eigenwerte der Ketten- und Widerstandsmatrix dargestellt werden, und zwar ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{k_1 l_1 - k_2 l_2}{l_1 - l_2}, \qquad & A_{12} &= -\frac{k_1 - k_2}{l_1 - l_2}\,l_1\,l_2, \\ A_{21} &= \frac{k_1 - k_2}{l_1 - l_2}, \qquad & A_{22} &= \frac{k_2 l_1 - k_1 l_2}{l_1 - l_2}, \end{aligned} \tag{42,9}$$

und

$$\begin{aligned} W_{11} &= \frac{k_1 l_1 - k_2 l_2}{k_1 - k_2}, \qquad & W_{12} &= -\frac{l_1 - l_2}{k_1 - k_2}\,k_1\,k_2, \\ W_{21} &= \frac{l_1 - l_2}{k_1 - k_2}, \qquad & W_{22} &= \frac{k_1 l_2 - k_2 l_1}{k_1 - k_2}. \end{aligned} \tag{42,10}$$

II. Quantenmechanik

43. Physikalische Grundlagen

In die klassische Atomtheorie waren Bestandteile eingeführt, gegen deren Beobachtbarkeit schwerwiegende Bedenken erhoben werden konnten: z.B. Ort, Geschwindigkeit, Umlaufszeit eines Elektrons. Experimentell beobachtbar sind dagegen die Energiestufen (Stoßversuch FRANK-HERTZ) und die aus ihnen ableitbaren, aber auch direkt meßbaren Frequenzen (vgl. Energiequant $h\nu$, PLANCKsches Wirkungsquantum $h = 6{,}61 \times 10^{-27}$ erg sec), Intensitäten und Polarisationszustände der Wellen. Wollte man dagegen Ort und Umlaufszeit eines Elektrons bestimmen, so brauchte man Meßstäbe und Uhren; diese bestehen aber selbst wieder aus Atomen und versagen daher im Bereich der Atomdimensionen: Messungen atomarer Dimensionen beruhen mithin auf indirekten Schlüssen.

1913 stellte BOHR die Frequenzregel auf: Ein Atom ist gewisser diskreter stationärer Zustände fähig („Quantenzustände"), in denen es nicht strahlt. Licht wird ausgesandt beim Übergang aus dem einen in den anderen stationären Zustand; die dabei verlorene Energie, die Differenz des Energieniveaus W_1, W_2 in den beiden stationären Zuständen verwandelt sich in ein Lichtquant $h\nu$: die Frequenz ν der ausgesandten Spektrallinien bestimmt sich aus der Gleichung

$$h\nu = W_1 - W_2\,, \tag{43,1}$$

in sie können für W_1, W_2 irgend zwei der diskreten Energieniveaus eingesetzt werden ($W_1 > W_2$). Bei Absorption hebt umgekehrt ein Lichtquant dadurch, daß es seine Energie $h\nu$ an das Atom abgibt, dieses von der Energiestufe W_2 auf die höhere W_1.

Nach der klassischen Elektrodynamik sollte das Atom zufolge der in ihm sich abspielenden Elektronenschwingungen beständig strahlen; die Frequenzen des ausgestrahlten Lichtes sollten übereinstimmen mit den Frequenzen der einfachen Schwingungen, in welche die Bewegung des Elektronensystems im Atom sich auflösen läßt. Durch die Strahlung selbst verliert das Atom Energie, dadurch modifiziert sich der Bewegungsvorgang, und mit ihm verschieben sich die Frequenzen. Diese Anschauung ist daher unvereinbar mit einer der fundamentalsten Erfahrungstatsachen, der Existenz scharfer Spektrallinien. Darüber hinaus enthält der BOHRsche Ansatz das grundlegende RITZsche Kombinationsprinzip. Wenn man die Energieniveaus nach steigender Größe $W_0 < W_1 < W_2 < \ldots$ ordnet, so ist nach (43,1) jede Linienfrequenz ν die Differenz zweier „Terme" $\nu_i = \frac{W_i}{h}$

$$\nu\,(n \to m) = \nu_n - \nu_m = \frac{1}{h}\,(W_n - W_m)\,, \quad n > m\,. \tag{43,2}$$

Infolgedessen tritt mit den Frequenzen $\nu\,(n \to m)$ und $\nu\,(m \to l)$ auch die aus ihnen durch Addition gewonnene kombinierte Frequenz

$$\nu\,(n \to l) = \nu\,(n \to m) + \nu\,(m \to l) \tag{43,3}$$

auf. Die Auswahlregeln für die vorkommenden Kombinationen werden also in den Gesetzen enthalten sein, nach denen sich die Intensitäten der Spektrallinien bestimmen.

Zunächst betrachten wir nun Vorgänge, denen in der klassischen Theorie eine eindimensionale Bewegung entsprechen würde; diese sei gegeben durch die Fourierdarstellung der Koordinate q:

$$q(t) = \sum_{\tau} e^{2\pi i \nu \tau t}. \tag{43,4}$$

Die Gesamtheit der Elementarschwingungen

$$q_\tau = e^{2\pi i \nu \tau t}$$

suchen wir nun so abzuändern, daß sie nicht die Oberschwingungen einer Bewegung, sondern die wirklichen Wellen eines Atoms darstellen.

Die Frequenzen sind also im allgemeinen nicht harmonisch ($\nu\tau$), sondern lassen sich nach dem Ritzschen Kombinationsprinzip gemäß (43,2) darstellen.

Zu jedem „Sprung" $n \to m$ gehört aber auch eine Amplitude und eine Phase, die wir komplex schreiben:

$$q(nm) = |q(nm)|\, e^{i\delta(nm)}. \tag{43,5}$$

Die Gesamtheit aller möglichen Schwingungen fassen wir in die Koordinatenmatrix

$$\mathfrak{q} = \begin{pmatrix} q(11)\, e^{2\pi i \nu(11) t} & q(12)\, e^{2\pi i \nu(12) t} \dots \\ q(21)\, e^{2\pi i \nu(21) t} & q(22)\, e^{2\pi i \nu(22) t} \dots \\ \vdots & \end{pmatrix} \tag{43,6}$$

zusammen, oder abgekürzt

$$\mathfrak{q} = \left(q(nm)\, e^{2\pi i \nu(nm) t}\right). \tag{43,7}$$

Damit diese Matrix einer reellen Fourierreihe $q(t)$ korrespondiert, muß noch die Bedingung

$$q(mn) = q^*(nm)$$

eingeführt werden, d. h. es wird verlangt, daß $\mathfrak{q}$ eine hermitische Matrix ist.

Es müssen nun die Gesetze aufgestellt werden, aus denen sich die Amplituden $q(nm)$ und die Frequenzen $\nu(nm)$ bestimmen. Dabei soll das Prinzip benützt werden, daß die neuen Gesetze denen der klassischen Mechanik so ähnlich als möglich gemacht werden sollen.

Multipliziert man nun die Matrix $\mathfrak{q}$ mit einer anderen $\mathfrak{p}$ (der Impulsmatrix), die dieselben Frequenzen $\nu(nm)$ hat, so folgt

$$\mathfrak{q}\mathfrak{p} = \left(\sum_k q(nk)\, e^{2\pi i \nu(nk) t}\, p(km)\, e^{2\pi i \nu(km) t}\right);$$

nun ist aber

$$\nu(nk) + \nu(km) = \frac{1}{h}(W_n - W_k) + \frac{1}{h}(W_k - W_m) = \frac{1}{h}(W_n - W_m) = \nu(nm),$$

also wird

$$\mathfrak{q}\mathfrak{p} = \left(\sum_k q(nk)\, p(km)\, e^{2\pi i \nu(nm) t}\right), \tag{43,8}$$

d. h. das Produkt gehört zu denselben Frequenzen. Diese Formel ist die sinngemäße Verallgemeinerung der Regel für die Bildung des Fourierkoeffizienten des

Produkts zweier Fourierreihen. Die Matrizenmultiplikation hängt also aufs engste mit dem RITZschen Kombinationsprinzip zusammen. Ist nun

$$\mathfrak{W}(nm) = (W_n \delta_{nm})$$

eine Energie-Diagonalmatrix, so wird

$$\mathfrak{W}\mathfrak{q} = \left(\sum_k W(nk)\, q(km)\right) = \left(W_n \sum_k \delta_{nk}\, q(km)\right) = \left(W_n\, q(nm)\right)$$

und

$$\mathfrak{q}\mathfrak{W} = \left(\sum_k q(nk)\, W(km)\right) = \left(\sum_k q(nk)\, W_k \delta_{km}\right) = \left(W_m\, q(nm)\right).$$

Bildet man die Differenz

$$\mathfrak{W}\mathfrak{q} - \mathfrak{q}\mathfrak{W} = ((W_n - W_m)\, q(nm)), \tag{43,9}$$

so folgt wegen des Kombinationsprinzips

$$\nu(nm) = \frac{1}{h}(W_n - W_m)$$

und wegen

$$\dot{\mathfrak{q}} = \frac{d\mathfrak{q}}{dt} = (2\pi i \nu(nm)\, q(nm))$$

die Beziehung

$$\dot{\mathfrak{q}} = \frac{2\pi i}{h}(\mathfrak{W}\mathfrak{q} - \mathfrak{q}\mathfrak{W}). \tag{43,10}$$

Nun versucht man, mit Hilfe der der Koordinatenmatrix $\mathfrak{q}$ zugeordneten Impulsmatrix $\mathfrak{p}$ durch Anwendung der Matrizenaddition und Multiplikation als Analogon der kanonischen Differentialgleichungen eine HAMILTON-Funktion $\mathfrak{H}$ aufzustellen. Die Ungültigkeit des kommutativen Gesetzes der Matrizenmultiplikation bedingt nun, daß

$$\mathfrak{p}\mathfrak{q} - \mathfrak{q}\mathfrak{p} \neq 0,$$

und zwar gilt die als kanonische Vertauschungsrelation bezeichnete Gleichung

$$\mathfrak{p}\mathfrak{q} - \mathfrak{q}\mathfrak{p} = \frac{h}{2\pi i}\mathfrak{E} = \varkappa[\mathfrak{p}\mathfrak{q}]. \tag{43,11}$$

Aus ihr ergeben sich die Folgerungen:

1. Die Funktion $[\mathfrak{p}\mathfrak{q}]$ ist sich selbst adjungiert, d. h. es ist

$$[\mathfrak{p}\mathfrak{q}]^\dagger = \frac{1}{\varkappa^*}(\mathfrak{q}\mathfrak{p} - \mathfrak{p}\mathfrak{q}) = \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{p}\mathfrak{q} - \mathfrak{q}\mathfrak{p}) = [\mathfrak{p}\mathfrak{q}]. \tag{43,12}$$

Daher ist die Vertauschungsregel in Einklang mit der Forderung, daß $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ hermitische Matrizen sind.

2. Die Matrizen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ sind unendliche Matrizen, da $[\mathfrak{p}\mathfrak{q}] = \mathfrak{E}$ ist (vgl. Ziffer 40).

Nunmehr können die kanonischen Gleichungen angegeben werden:

$$\begin{aligned} \dot{\mathfrak{q}} &= \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}}, \\ \dot{\mathfrak{p}} &= -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{q}}. \end{aligned} \tag{43,13}$$

Das sind unendlich viele Gleichungen für unendlich viele Unbekannte, da die rechts und links stehenden Matrizen Element für Element gleich sein sollen.

Um den Energiesatz abzuleiten, braucht man die beiden folgenden Hilfsformeln:

Ist $f\,(\mathfrak{p}\mathfrak{q})$ irgend eine Matrizenfunktion von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, so gilt

$$\begin{aligned} f\mathfrak{q} - \mathfrak{q}f &= \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{p}}, \\ \mathfrak{p}f - f\mathfrak{p} &= \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{q}}; \end{aligned} \tag{43,14}$$

denn ist z. B. $f = \varphi\cdot\psi$, und nimmt man an, die Gleichungen (43,14) seien für irgend zwei Funktionen φ und ψ richtig, so folgt

$$\begin{aligned} \varphi\cdot\psi\,\mathfrak{q} - \mathfrak{q}\,\varphi\cdot\psi &= \varphi\,(\psi\,\mathfrak{q} - \mathfrak{q}\,\psi) + (\varphi\,\mathfrak{q} - \mathfrak{q}\,\varphi)\,\psi \\ &= \frac{h}{2\pi i}\left(\varphi\,\frac{\partial\psi}{\partial\mathfrak{p}} + \frac{\partial\varphi}{\partial\mathfrak{p}}\,\psi\right) = \frac{h}{2\pi i}\,\frac{\partial\varphi\psi}{\partial\mathfrak{p}}. \end{aligned}$$

Nun gelten die Relationen (43,14) für $f = \mathfrak{p}$ und $f = \mathfrak{q}$; also sind sie auch für jede Funktion gültig, da die Funktionen durch wiederholte Anwendung der Elementaroperationen definiert sind.

Die kanonischen Gleichungen können daher wegen (43,10) folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}\,\mathfrak{q} - \mathfrak{q}\,\mathfrak{W} &= \mathfrak{H}\,\mathfrak{q} - \mathfrak{q}\,\mathfrak{H}, \\ \mathfrak{W}\,\mathfrak{p} - \mathfrak{p}\,\mathfrak{W} &= \mathfrak{H}\,\mathfrak{p} - \mathfrak{p}\,\mathfrak{H}, \end{aligned} \tag{43,15}$$

oder auch

$$\begin{aligned} (\mathfrak{W} - \mathfrak{H})\,\mathfrak{q} - \mathfrak{q}\,(\mathfrak{W} - \mathfrak{H}) &= 0, \\ (\mathfrak{W} - \mathfrak{H})\,\mathfrak{p} - \mathfrak{p}\,(\mathfrak{W} - \mathfrak{H}) &= 0. \end{aligned} \tag{43,16}$$

Die Größe $\mathfrak{W} - \mathfrak{H}$ ist also mit $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$, also auch mit jeder Funktion von $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ vertauschbar, insbesondere mit $\mathfrak{H}\,(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$:

$$(\mathfrak{W} - \mathfrak{H})\,\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\,(\mathfrak{W} - \mathfrak{H}) = 0,$$

oder

$$\mathfrak{W}\,\mathfrak{H} - \mathfrak{H}\,\mathfrak{W} = 0. \tag{43,17}$$

Daraus folgt aber

$$\dot{\mathfrak{H}} = 0. \tag{43,18}$$

Damit ist der Energiesatz bewiesen. Da Diagonalmatrizen vertauschbar sind, ist aber $\mathfrak{H}$ eine Diagonalmatrix

$$H_{(nm)} = H_n\,\delta_{nm}. \tag{43,19}$$

Nun lautet die erste Gleichung (43,15) für die Elemente

$$q_{(nm)}\,(W_n - W_m) = q\,(nm)\,(H_n - H_m),$$

also

$$H_n - H_m = W_n - W_m = h\nu(nm). \tag{43,20}$$

Damit ist also auch die Bohrsche Frequenzbedingung als Folge der Grundannahmen bewiesen. Wird durch geeignete Wahl der willkürlichen Konstanten gesetzt

$$H_n = W_n, \tag{43,21}$$

so ist dadurch das RITZsche Kombinationsprinzip zur BOHRschen Frequenzbedingung verschärft.

Umgekehrt läßt sich unter der Voraussetzung, daß Energiesatz und Frequenzbedingung gelten, die Energiefunktion $\mathfrak{H}$ als analytische Funktion irgendwelcher Variablen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ darstellen.

Wenn
$$\mathfrak{P}\mathfrak{Q}-\mathfrak{Q}\mathfrak{P}=\frac{h}{2\pi i}$$
ist, so bestehen die kanonischen Gleichungen
$$\dot{\mathfrak{Q}}=\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\mathfrak{P}},\quad \dot{\mathfrak{P}}=-\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial\mathfrak{Q}}.$$
Die Größen $\mathfrak{H}\mathfrak{P}-\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}\mathfrak{Q}-\mathfrak{Q}\mathfrak{H}$ können dann interpretiert werden als partielle Ableitungen von $\mathfrak{H}$ oder, da $\mathfrak{H}$ konstant ist, als Ableitungen von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ nach der Zeit.

Unter kanonischen Transformationen $\mathfrak{p}\mathfrak{q}\to\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ wird man daher eine solche verstehen, bei der
$$\mathfrak{p}\mathfrak{q}-\mathfrak{q}\mathfrak{p}=\mathfrak{P}\mathfrak{Q}-\mathfrak{Q}\mathfrak{P}=\frac{h}{2\pi i}\cdot\mathfrak{E} \tag{43,22}$$
ist; denn dann gelten die kanonischen Gleichungen sowohl für $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ wie für $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$.

Bedeutet nun $\mathfrak{S}$ eine beliebige Matrix, so wird die allgemeine Transformation darstellbar sein durch
$$\mathfrak{P}=\mathfrak{S}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{S}^{-1},\quad \mathfrak{Q}=\mathfrak{S}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{S}^{-1}. \tag{43,23}$$
Die Wichtigkeit der kanonischen Transformation beruht nun auf folgendem Satz: Ist irgendein Variablenpaar $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{q}_0$ gegeben, das die Bedingung
$$\mathfrak{p}_0\mathfrak{q}_0-\mathfrak{q}_0\mathfrak{p}_0=\frac{h}{2\pi i}\cdot\mathfrak{E}$$
erfüllt, so kann man das Problem der Interpretation der kanonischen Gleichungen für eine Energiefunktion $\mathfrak{H}\,(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$ reduzieren auf folgende Aufgabe: Es ist eine Funktion $\mathfrak{S}$ so zu bestimmen, daß
$$\mathfrak{H}\,(\mathfrak{p},\mathfrak{q})=\mathfrak{S}\,\mathfrak{H}\,(\mathfrak{p}_0,\mathfrak{q}_0)\,\mathfrak{S}^{-1}=\mathfrak{W} \tag{43,24}$$
eine Diagonalmatrix wird, wobei die Diagonalelemente die Eigenwerte, also die Energiestufen der Matrix sind. Die Lösung der kanonischen Gleichungen lautet dann:
$$\mathfrak{p}=\mathfrak{S}\,\mathfrak{p}_0\,\mathfrak{S}^{-1},\quad \mathfrak{q}=\mathfrak{S}\,\mathfrak{q}_0\,\mathfrak{S}^{-1} \tag{43,25}$$
und ist ein vollständiges Analogon zur HAMILTON-JAKOBIschen Differentialgleichung; $\mathfrak{S}$ entspricht daher der Wirkungsfunktion.

44. Der harmonische Oszillator

Als Beispiel werde der harmonische Oszillator behandelt. Die Energiefunktion ist gegeben durch
$$\mathfrak{H}=\frac{1}{2m}\,\mathfrak{p}^2+\frac{D}{2}\,\mathfrak{q}^2 \tag{44,1}$$

wobei m die Masse und D die Direktionskraft der elastischen Bindung bedeutet. Durch vordere und hintere Multiplikation von $\mathfrak{H}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ mit $\mathfrak{q}$ entstehen die Gleichungen

$$\mathfrak{q}\,\mathfrak{H} = \frac{1}{2m}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}^2 + \frac{D}{2}\,\mathfrak{q}^3,$$

$$\mathfrak{H}\,\mathfrak{q} = \frac{1}{2m}\,\mathfrak{p}^2\,\mathfrak{q} + \frac{D}{2}\,\mathfrak{q}^3,$$

oder zusammengefaßt

$$\mathfrak{H}\,\mathfrak{q} - \mathfrak{q}\,\mathfrak{H} = \frac{1}{2m}\,(\mathfrak{p}^2\,\mathfrak{q} - \mathfrak{q}\,\mathfrak{p}^2). \tag{42,2}$$

Durch vordere und hintere Multiplikation der Vertauschungsrelation mit $\mathfrak{p}$ entsteht

$$\mathfrak{p}^2\,\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{p} = \frac{h}{2\pi i}\,\mathfrak{p},$$

$$\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}\,\mathfrak{p} - \mathfrak{q}\,\mathfrak{p}^2 = \frac{h}{2\pi i}\,\mathfrak{p},$$

oder zusammengefaßt

$$\mathfrak{p}^2\,\mathfrak{q} - \mathfrak{q}\,\mathfrak{p}^2 = \frac{h}{\pi i}\,\mathfrak{p}, \tag{44,3}$$

d. h. aus (44,2) und (44,3) wird

$$\mathfrak{H}\,\mathfrak{q} - \mathfrak{q}\,\mathfrak{H} = \frac{h}{2\pi i m}\,\mathfrak{p},$$

d. h. man erhält für die Elemente der Matrix $\mathfrak{p}$, da $\mathfrak{H}$ eine Diagonalmatrix ist,

$$p_{mn} = \frac{2\pi i m}{h}\,(W_m - W_n)\,q_{mn}. \tag{44,4}$$

Zu einer zweiten Beziehung zwischen p_{mn} und q_{mn} gelangt man durch Multiplikation von $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{p}$ und der Vertauschungsrelation mit $\mathfrak{q}$:

$$\mathfrak{H}\,\mathfrak{p} - \mathfrak{p}\,\mathfrak{H} = \frac{D}{2}\,(\mathfrak{q}^2\,\mathfrak{p} - \mathfrak{p}\,\mathfrak{q}^2),$$

$$\mathfrak{q}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q} - \mathfrak{q}^2\,\mathfrak{p} = \frac{h}{2\pi i}\,\mathfrak{q},$$

$$\mathfrak{p}\,\mathfrak{q}^2 - \mathfrak{q}\,\mathfrak{p}\,\mathfrak{q} = \frac{h}{2\pi i}\,\mathfrak{q},$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{H}\,\mathfrak{p} - \mathfrak{p}\,\mathfrak{H} = -\frac{D}{2}\,\frac{h}{\pi i}\,\mathfrak{q}.$$

Also für die Elemente:

$$p_{mn}\,(W_m - W_n) = -\frac{D}{2}\,\frac{h}{\pi i}\,q_{mn}, \tag{44,5}$$

(44,4) und (44,5) ergeben

$$q_{mn}\left(1 - \frac{4\pi^2 m}{D h^2}\,(W_m - W_n)^2\right) = 0. \tag{44,6}$$

Ist nun $q_{mn} \neq 0$, so folgt

$$W_m - W_n = \mp h\nu_0, \tag{44,7}$$

wobei $\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$ die klassische Eigenfrequenz des Oszillators ist. Da auch die den diskreten Niveaus zugeordneten Energien als Eigenwerte bezeichnet werden,

so läßt sich Gleichung (44,7) folgendermaßen interpretieren: Hat man einen Eigenwert W_n gefunden, so gibt es zwei Eigenwerte W_{n-1} und W_{n+1}, die um $h\nu$ kleiner bzw. größer sind als W_n; man kann nun für W_n den Ansatz einer arithmetischen Reihe machen:

$$W_n = W_0 + n h \nu_0. \tag{44,8}$$

W_0 bedeutet daher den kleinsten Eigenwert der Reihe.

Für alle anderen Kombinationen der Indizes muß q_{mn}, also auch p_{mn}, verschwinden; es bleiben also nur $q_{n,n+1}$ und $q_{n,n-1}$ von Null verschieden. W_0 läßt sich nun wie folgt ermitteln:

Es ist $\quad W_0 = H_{00} = \frac{1}{2m} \sum_\nu p_{0\nu} p_{\nu 0} + \frac{D}{2} \sum_\nu q_{0\nu} q_{\nu 0} = \frac{1}{2m} p_{01} p_{10} + \frac{D}{2} q_{01} q_{10}.$

Aus (44,4) ergibt sich

$$p_{01} = \frac{2\pi i m}{h} (W_0 - W_1) q_{01} = -\frac{2\pi i m}{h} \cdot h\nu_0 \cdot q_{01}$$

und

$$p_{10} = \frac{2\pi i m}{h} (W_1 - W_0) q_{10} = \frac{2\pi i m}{h} h\nu_0 q_{10}. \tag{44,9}$$

Da $q_{nm} = q^*_{mn}$, so folgt

$$W_0 = |q_{01}|^2 \left(\frac{4\pi^2 m \nu_0^2}{2m} + \frac{D}{2}\right). \tag{44,10}$$

q_{01} kann aus dem 1. Diagonalelement der Vertauschungsrelation unter Beachtung von (44,9) entnommen werden zu

$$|q_{01}|^2 = \frac{h}{8\pi^2 m \nu_0}. \tag{44,11}$$

Daher wird (44,10)

$$W_0 = \frac{h}{8\pi^2 m \nu_0}\left(\frac{4\pi^2 m^2 \nu_0^2}{2m} + \frac{D}{2}\right) = \frac{h\nu_0}{4} + \frac{Dh}{16\pi^2 m \nu_0} = \frac{h\nu_0}{2}. \tag{44,12}$$

Es ist also

$$W_n = \frac{h\nu_0}{2} + n h \nu_0 = h\nu_0\left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{44,13}$$

$W_0 = \frac{h\nu_0}{2}$ ist dabei die „Nullpunktenergie".

Wir können die Matrizen $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{H}$ direkt angeben. Beachtet man, daß durch wiederholte Anwendung von (44,11) allgemein gilt:

$$q_{n+1,n} \cdot q^*_{n+1,n} = |q_{n+1,n}|^2 = \frac{h}{8\pi^2 m \nu_0}(n+1), \tag{44,14}$$

so hat $\mathfrak{q}$ die folgende Gestalt:

$$\mathfrak{q} = \sqrt{\frac{h}{8\pi^2 m \nu_0}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}. \tag{44,15}$$

Nach (44,4) und (44,7) wird

$$p_{m,n} = \frac{2\pi i m}{h} h \nu_0 q_{mn},$$

also

$$p_{n+1,n} = 2\pi i m \nu_0 q_{n+1,n} = -\frac{h}{2\pi i}\sqrt{\frac{4\pi^2\nu_0^2 m}{2h\nu_0}(n+1)}$$

und

$$p_{n,n+1} = -2\pi i m \nu_0 q_{n,n+1} = +\frac{h}{2\pi i}\sqrt{\frac{4\pi^2\nu_0^2 m}{2h\nu_0}(n+1)} \qquad (44,16)$$

Daher wird

$$\mathfrak{p} = \frac{h}{2\pi i}\sqrt{\frac{4\pi^2\nu_0^2 m}{2h\nu_0}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ -\sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \dots \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix} \qquad (44,17)$$

Es ist nun:

$$\mathfrak{p}\mathfrak{q} = \frac{h}{4\pi i}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{6} & \dots \\ -\sqrt{2} & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & -\sqrt{6} & 0 & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix}$$

und

$$\mathfrak{q}\mathfrak{p} = \frac{h}{4\pi i}\begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 0 & \sqrt{6} & \dots \\ -\sqrt{2} & 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -\sqrt{6} & 0 & -1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix},$$

d. h. $\mathfrak{p}\mathfrak{q} - \mathfrak{q}\mathfrak{p} = \frac{h}{2\pi i}$; die Vertauschungsrelation ist also erfüllt.

Um die Matrix der Hamilton-Funktion zu bestimmen, bilden wir

$$\frac{\mathfrak{p}^2}{2m} = -\frac{h\nu_0}{4}\begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & -3 & 0 & \sqrt{6} & \dots \\ \sqrt{2} & 0 & -5 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & -7 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \frac{D}{2}\mathfrak{q}^2 = \frac{h\nu_0}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 0 & \sqrt{6} & \dots \\ \sqrt{2} & 0 & 5 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 7 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix},$$

daher nach (44,1)

$$\mathfrak{H} = \frac{h\nu_0}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 5 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 7 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \end{pmatrix}. \qquad (44,18)$$

$\mathfrak{H}$ ist also eine Diagonalmatrix, und es ist $W_0 = \frac{h\nu_0}{2}$ und $W_n = h\nu_0(n+\frac{1}{2})$. Statt der hermitischen Matrizen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ kann auch eine nichthermitische Matrix $\mathfrak{b}$ benutzt werden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{b} &= C(\mathfrak{p} - 2\pi i \nu_0 m \mathfrak{q}) \\ \mathfrak{b}^\dagger &= C(\mathfrak{p} + 2\pi i \nu_0 m \mathfrak{q}), \end{aligned} \qquad (44,19)$$

wobei C eine noch zu bestimmende Konstante ist.

Die kanonischen Bewegungsgleichungen (43,13)

$$\dot{\mathfrak{q}} = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{p}} = \frac{\mathfrak{p}}{m}, \qquad \dot{\mathfrak{p}} = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \mathfrak{q}} = -D\mathfrak{q}$$

gehen nun über in

$$\dot{\mathfrak{b}} = -2\pi i \nu_0 \mathfrak{b}, \qquad \dot{\mathfrak{b}}^\dagger = 2\pi i \nu_0 \mathfrak{b}^\dagger. \tag{44,20}$$

Weiterhin wird

$$\mathfrak{b}\mathfrak{b}^\dagger = C^2 (\mathfrak{p}^2 + 4\pi^2 \nu_0^2 m^2 \mathfrak{q}^2 + 2\pi i \nu_0 m (\mathfrak{p}\mathfrak{q} - \mathfrak{q}\mathfrak{p})$$

$$\mathfrak{b}^\dagger\mathfrak{b} = C^2 (\mathfrak{p}^2 + 4\pi^2 \nu_0^2 m^2 \mathfrak{q}^2 - 2\pi i \nu_0 m (\mathfrak{p}\mathfrak{q} - \mathfrak{q}\mathfrak{p})$$

und die Vertauschungsrelation $[\mathfrak{p}, \mathfrak{q}] = \frac{1}{\varkappa}(\mathfrak{p}\mathfrak{q} - \mathfrak{q}\mathfrak{p}) = \mathfrak{E}$

geht über in

$$\mathfrak{b}\mathfrak{b}^\dagger = \mathfrak{b}^\dagger\mathfrak{b} = \mathfrak{E}, \tag{44,21}$$

wenn

$$C = \frac{1}{\sqrt{2 h \nu_0 m}} \tag{44,22}$$

gesetzt wird.

Für $\mathfrak{H}$ sind dann die beiden folgenden Darstellungen gegeben:

$$\begin{aligned} \mathfrak{H} &= h\nu_0 \mathfrak{b}\mathfrak{b}^\dagger - \frac{h\nu_0}{2} \\ &= h\nu_0 \mathfrak{b}^\dagger\mathfrak{b} + \frac{h\nu_0}{2}. \end{aligned} \tag{44,23}$$

Nun gilt als Verallgemeinerung von (43,10) für eine Funktion $\mathfrak{f}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$

$$\mathfrak{W}\mathfrak{f} - \mathfrak{f}\mathfrak{W} = \frac{h}{2\pi i}\dot{\mathfrak{f}}, \tag{44,24}$$

also mit $\mathfrak{f} = \mathfrak{b}$ und unter Berücksichtigung von (44,20)

$$\mathfrak{W}\mathfrak{b} - \mathfrak{b}\mathfrak{W} = -\frac{h}{2\pi i} \cdot 2\pi i \nu_0 \mathfrak{b} = -h\nu_0 \mathfrak{b}, \tag{44,25}$$

oder für die Elemente

$$(W_n - W_m)\, \mathfrak{b}_{nm} = -h\nu_0 \mathfrak{b}_{nm}, \tag{44,26}$$

d. h. bei einer *einfachen* Lösung müssen die verschiedenen Eigenwerte der Energie eine lückenlose arithmetische Reihe mit der Differenz $h\nu_0$ bilden.

Nun besitzt $\mathfrak{H}$ nur positive Eigenwerte, da es als Summe zweier Quadrate dargestellt wurde und dementsprechend eine positiv definitive Matrix ist. Die arithmetische Reihe muß also ein Anfangsglied besitzen. Wird $\mathfrak{H} = \mathfrak{W}$ als Diagonalmatrix und werden entsprechend der Vielfachheit der Eigenwerte $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}^\dagger$ als Übermatrizen geschrieben

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{W} &= (W^{(r)}\delta_{rs}) \\ \mathfrak{b} &= (\mathfrak{b}^{(r,s)}),\ \mathfrak{b}^\dagger = (\mathfrak{b}^{\dagger(r,s)}) \end{aligned}\right\},\quad r, s = 0, 1, \ldots, \tag{44,27}$$

so ist, wenn die Zählung der Stufen mit 0 beginnt und g_0 die Länge der $(r+1)$-ten Stufe genannt wird, $b^{(r,s)}$ eine Matrix von g_r Zeilen und g_s Spalten. $\mathfrak{W}^{(r)}$ ist dann nach (44,26) gegeben durch

$$\mathfrak{W}^{(r)} = W_r \cdot \mathfrak{E}^{(r)}, \tag{48,28}$$

wobei $\mathfrak{E}^{(r)}$ die Einheitsmatrix von g_r Zeilen und Spalten und die Zahl

$$W_r = r\,h\nu_0 + W_0 \tag{44,29}$$

ist. Für die Teilmatrizen hat man

$$(W_r - W_s)\,\mathfrak{b}^{(r,s)} = -h\nu_0\,\mathfrak{b}^{(r,s)}$$
$$(W_r - W_s)\,\mathfrak{b}^{\dagger(r,s)} = h\nu_0\,\mathfrak{b}^{(r,s)},$$

also wegen (44,29)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{b}^{(r,s)} &= 0, \text{ wenn } r - s \neq -1 \\ \mathfrak{b}^{\dagger(r,s)} &= 0, \text{ wenn } r - s \neq +1 \end{aligned}\right\}; \tag{44,30}$$

daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}\mathfrak{b}^\dagger &= (\mathfrak{b}^{(r,r+1)}\,\mathfrak{b}^{\dagger(r+1,r)}\,\delta rs) \\ \mathfrak{b}^\dagger\mathfrak{b} &= (\mathfrak{b}^{\dagger(r,r-1)}\,\mathfrak{b}^{(r-1,r)}\,\delta rs) \end{aligned} \tag{44,31}$$

und da r keine negativen Werte annehmen kann, so verschwindet die Teilmatrix $\mathfrak{b}^\dagger\mathfrak{b}$ für $r = 0$.

Somit ergibt sich aus der zweiten Gleichung (44,23) für $r = 0$

$$\mathfrak{W}^{(0)} = \frac{h\nu_0}{2}\,\mathfrak{E}^{(0)}, \quad W_0 = \frac{h\nu_0}{2}, \tag{44,32}$$

allgemein

$$\begin{aligned} \mathfrak{W}^{(r)} &= h\nu_0\,\mathfrak{b}^{(r,r+1)}\,\mathfrak{b}^{\dagger(r+1,r)} - \frac{h\nu_0}{2}\,\mathfrak{E}^{(r)} \\ \mathfrak{W}^{(r+1)} &= h\nu_0\,\mathfrak{b}^{\dagger(r+1,r)}\,\mathfrak{b}^{(r,r+1)} + \frac{h\nu_0}{2}\,\mathfrak{E}^{(r+1)}. \end{aligned} \tag{44,33}$$

Nach (44,28), (44,29) und (44,32) wird daher

$$\begin{aligned} &\text{a) } \mathfrak{b}^{(r,r+1)}\,\mathfrak{b}^{\dagger(r+1,r)} = (r+1)\,\mathfrak{E}^{(r)} \\ &\text{b) } \mathfrak{b}^{\dagger(r+1,r)}\,\mathfrak{b}^{(r,r+1)} = (r+1)\,\mathfrak{E}^{(r+1)}. \end{aligned} \tag{44,34}$$

Bildet man die Spuren dieser Matrizen, so ergibt sich links dieselbe Größe, während rechts $(r+1)\,g_r$ bzw. $(r+1)\,g_{r+1}$ herauskommt, also muß

$$g_{r+1} = g_r$$

sein, d. h. alle Eigenwerte besitzen dieselbe Vielfachheit g_0.

Es soll nun gezeigt werden, daß für eine einfache (irreduzible) Lösung bei den Termen die Vielfachheit gleich 1 ist; eine Lösung der Vielfachheit $g_r > 0$ kann in g_0 einfache Lösungen zerfällt werden. Wegen (44,35) ist $\mathfrak{b}^{(r,r+1)}$ eine quadratische Matrix. Und es kann nun nach (44,34) gesetzt werden:

$$\mathfrak{b}^{(r,r+1)} = \mathfrak{U}_r\,\sqrt{r+1}, \tag{44,36}$$

wo $\mathfrak{U}_r$ eine g_0-reihige unitäre Matrix ist; denn es ist für $\mathfrak{U}_r = \frac{\mathfrak{b}^{(r,r+1)}}{\sqrt{r+1}}$; $\mathfrak{U}_r\mathfrak{U}_r^\dagger = \mathfrak{E}^{(r)}$. Wird weiterhin $\mathfrak{b}$ mit einer unitären Stufenmatrix

$$\mathfrak{V} = (\delta_{rs}\,V^{(r)}) \tag{44,37}$$

transformiert, so entsteht eine Übermatrix

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{V}^{-1}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{V}, \tag{44,38}$$

in der wieder nur die Teilmatrizen $\mathfrak{B}^{(r,r+1)}$ wegen (44,36) von Null verschieden sind:

$$\mathfrak{B}^{(r,r+1)} = \mathfrak{B}^{(r)-1}\,\mathfrak{b}^{(r,r+1)}\,\mathfrak{B}^{(r+1)} = \sqrt{r+1}\;\mathfrak{B}^{(r)-1}\,\mathfrak{U}_r\,\mathfrak{B}^{(r+1)}. \tag{44,39}$$

Nun kann man $\mathfrak{B}$ so wählen, daß die $\mathfrak{B}^{(r,r+1)}$ Vielfache der Einheitsmatrix $\mathfrak{E}^{(0)}$ werden; ist z. B.

$$\mathfrak{U}_r\,\mathfrak{B}^{(r+1)} = \mathfrak{B}^{(r)}, \quad \mathfrak{B}^{(0)} = \mathfrak{E}^{(0)},$$

d. h.

$$\mathfrak{U}_r = \mathfrak{B}^{(r)} \cdot (\mathfrak{B}^{(r+1)})^{-1}, \tag{44,40}$$

so wird

$$\mathfrak{B}^{(r,r+1)} = \sqrt{r+1}\;(\mathfrak{B}^{(r)})^{-1} \cdot \mathfrak{B}^{(r)} \cdot (\mathfrak{B}^{(r+1)})^{-1}\,\mathfrak{B}^{(r+1)} = \sqrt{r+1}\;\mathfrak{E}^{(0)}. \tag{44,41}$$

Damit ist aber die Zerfällung durchgeführt: $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^\dagger$ sind nach (44,41) in g_0 übereinstimmende Lösungen mit nur einfachen Eigenwerten gespalten.

Bezeichnen wir die Matrixelemente der einfachen Lösung ($g_0 = 1$) mit b_{nm}, dann ist $\mathfrak{U}_r$ eine einreihige unitäre Matrix, d. h. eine komplexe Zahl vom Betrage 1, etwa $e^{i\varphi_n}$.

Damit erhält man als Resultat

$$\left.\begin{aligned}
&\begin{cases} \mathfrak{b}_{nm} = 0, \text{ wenn } n-m \neq -1 \\ \mathfrak{b}^\dagger_{nm} = 0, \text{ wenn } n-m \neq +1 \end{cases}\\
&\begin{cases} \mathfrak{b}_{n,n+1} = \sqrt{n+1}\;e^{i\varphi_n} \\ \mathfrak{b}^\dagger_{n+1,n} = \sqrt{n+1}\;e^{-i\varphi_n} \end{cases}\\
&W_n = h\nu_0\,(n+\tfrac{1}{2}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots
\end{aligned}\right\} \tag{44,42}$$

Wird die Gleichung (44,19) unter Berücksichtigung von (44,22) nach $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ aufgelöst, so folgt

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{p} &= \sqrt{\frac{h\nu_0}{2}m}\,(\mathfrak{b}^\dagger + \mathfrak{b})\\
\mathfrak{q} &= \frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{h}{2\nu_0 m}}\,(\mathfrak{b}^\dagger - \mathfrak{b}),
\end{aligned}\right\} \tag{44,43}$$

oder mit (44,42)

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{p}_{n,m} &= 0, \quad \mathfrak{q}_{n,m} = 0, \text{ wenn } n-m \neq \pm 1\\
\mathfrak{p}_{n,n+1} &= \sqrt{\frac{h\nu_0}{2}m}\,\mathfrak{b}_{n,n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2\,h\nu_0\,m\,(n+1)}\;e^{i\varphi_n}\\
\mathfrak{p}_{n+1,n} &= \sqrt{\frac{h\nu_0}{2}m}\,\mathfrak{b}^\dagger_{n+1,n} = \frac{1}{2}\sqrt{2\,h\nu_0\,m\,(n+1)}\;e^{-i\varphi_n}\\
\mathfrak{q}_{n,n+1} &= \frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{h}{2\nu_0 m}}\,\mathfrak{b}_{n,n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h\,(n+1)}{2\pi^2 m\nu_0}}\;e^{i\left(\varphi_n+\frac{\pi}{2}\right)}\\
\mathfrak{q}_{n+1,n} &= \frac{1}{2\pi i}\sqrt{\frac{h}{2\nu_0 m}}\,\mathfrak{b}^\dagger_{n+1,n} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{h\,(n+1)}{2\pi^2 m\nu_0}}\;e^{-i\left(\varphi_n+\frac{\pi}{2}\right)}.
\end{aligned}\right\} \tag{44,44}$$

Damit kann die Behandlung des einfachsten matrizenmechanischen Systems, des harmonischen Oszillators als abgeschlossen betrachtet werden.

45. Störungsrechnung für nichtentartete Systeme

Die Theorie des harmonischen Oszillators kann als Ausgangspunkt für die Behandlung allgemeiner Systeme dienen, indem man diese durch Variation eines Parameters aus dem harmonischen Oszillator entstanden denkt. Das dabei benötigte Verfahren kann in enger Analogie zur klassischen Störungstheorie entwickelt werden.

Es sei nun ein Problem durch Angabe der HAMILTON-Funktion vorgelegt. Aus ihr möge durch eine Vernachlässigung, die wir als klein betrachten, eine andere HAMILTON-Funktion $H^{(0)}$ hervorgehen. Die zu $H^{(0)}$ gehörenden Eigenwerte $W_k^{(0)}$ seien bekannt und es sei $\mathfrak{H}^{(0)} = \mathfrak{W}^{(0)}$ bereits eine Diagonalmatrix.

Nun werde die vorgelegte HAMILTON-Funktion nach Potenzen eines Parameters λ entwickelt

$$H = H^{(0)} + \lambda H^{(1)} + \lambda^2 H^{(2)} + \cdots, \tag{45,1}$$

wobei durch Vernachlässigung von λ gerade $H^{(0)}$ entsteht.

Die zugehörige Matrizengleichung lautet dann

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}^{(0)} + \lambda \mathfrak{H}^{(1)} + \lambda^2 \mathfrak{H}^{(2)} + \cdots = \mathfrak{W}^{(0)} + \lambda \mathfrak{H}^{(1)} + \lambda^2 \mathfrak{H}^{(2)} + \cdots; \tag{45,2}$$

$\mathfrak{W}^{(0)}$, $\mathfrak{H}^{(1)}$, $\mathfrak{H}^{(2)}$ sind dabei bekannte Matrizen.

Wird nun $\mathfrak{H}'$ durch eine noch zu ermittelnde Matrix $\mathfrak{S}$ auf Hauptachsen transformiert, indem $\mathfrak{S}$ ebenfalls nach λ entwickelt wird:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{(0)} + \lambda \mathfrak{S}^{(1)} + \lambda^2 \mathfrak{S}^{(2)} + \cdots \tag{45,3}$$

so entsteht als Ergebnis eine Matrix $\mathfrak{W}$, die nach λ entwickelt, lautet

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{W}^{(0)} + \lambda \mathfrak{W}^{(1)} + \lambda^2 \mathfrak{W}^{(2)} + \cdots, \tag{45,4}$$

$\mathfrak{W}^{(0)}, \mathfrak{W}^{(1)}, \mathfrak{W}^{(2)}, \ldots$ sind dabei Diagonalmatrizen.

Wegen der allgemeinen Transformationsgleichung (Satz 109) wird dann wegen

$$\begin{gathered} \mathfrak{H} = \mathfrak{W} = \mathfrak{S}^\dagger \mathfrak{H}' \mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{H}' \mathfrak{S}: \\ (\mathfrak{S}^{(0)} + \lambda \mathfrak{S}^{(1)} + \lambda^2 \mathfrak{S}^{(2)} + \cdots)(\mathfrak{W}^{(0)} + \lambda \mathfrak{W}^{(1)} + \lambda^2 \mathfrak{W}^{(2)} + \cdots) \\ = (\mathfrak{W}^{(0)} + \lambda \mathfrak{H}^{(1)} + \lambda^2 \mathfrak{H}^{(2)} + \cdots)(\mathfrak{S}^{(0)} + \lambda \mathfrak{S}^{(1)} + \lambda^2 \mathfrak{S}^{(2)} + \cdots), \end{gathered} \tag{45,5}$$

aus der $\mathfrak{W}^{(1)}, \mathfrak{W}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{S}^{(0)}, \mathfrak{S}^{(1)}, \mathfrak{S}^{(2)}, \ldots$ gefunden werden können.

Die nullte Näherung. Sie wird erhalten, wenn $\lambda = 0$ gesetzt wird. Aus (45,5) folgt

$$\mathfrak{S}^{(0)} \mathfrak{W}^{(0)} = \mathfrak{H}^{(0)} \mathfrak{S}^{(0)}. \tag{45,6}$$

Da $\mathfrak{H}^{(0)} = \mathfrak{W}^{(0)}$ eine Diagonalmatrix ist, lautet das ik-te Element

$$S_{ik}^{(0)} W_k^{(0)} = W_i^{(0)} S_{ik}^{(0)}. \tag{45,7}$$

Ist $W_i^{(0)} \neq W_k^{(0)}$, so muß das Element $S_{ik}^{(0)}$ verschwinden. Ist dagegen $W_i^{(0)} = W_k^{(0)}$, so schreibt (45,7) über das Element $S_{ik}^{(0)}$ nichts vor. Sind die Eigenwerte in der nullten Näherung alle voneinander verschieden, so muß $\mathfrak{S}^{(0)}$ eine Diagonalmatrix sein.

Da $\mathfrak{S}^{(0)}$ unitär ist, gilt

$$\mathfrak{S}^{(0)} \mathfrak{S}^{(0)\dagger} = \mathfrak{E},$$

was für das Diagonalelement

$$\sum_\nu S_{k\nu}^{(0)} S_{\nu k}^{(0)\dagger} = S_{kk}^{(0)} S_{kk}^{(0)\dagger} = \mathfrak{E}$$

vorschreibt. Die Diagonalelemente von $\mathfrak{S}^{(0)}$ sind Zahlen vom Betrag 1.

$\mathfrak{S}^{(0)}$ ist eine Phasenmatrix und es kann

$$\mathfrak{S}^{(0)} = \mathfrak{E} \tag{45,8}$$

gesetzt werden.

Die nullte Näherung ist also völlig trivial, wenn keine Entartung vorliegt.

Die erste Näherung. In erster Näherung berücksichtigen wir in (45,5) die Glieder mit λ und vernachlässigen die mit λ^2. Dann erhält man wegen (45,6):

$$\mathfrak{S}^{(1)} \mathfrak{W}^{(0)} + \mathfrak{S}^{(0)} \mathfrak{W}^{(1)} = \mathfrak{W}^{(0)} \mathfrak{S}^{(1)} + \mathfrak{H}^{(1)} \mathfrak{S}^{(0)}, \tag{45,9}$$

wofür wegen (45,8) auch geschrieben werden kann:

$$\mathfrak{S}^{(1)} \mathfrak{W}^{(0)} + \mathfrak{W}^{(1)} = \mathfrak{W}^{(0)} \mathfrak{S}^{(1)} + \mathfrak{H}^{(1)}. \tag{45,10}$$

Das ik-te Element dieser Matrizengleichung gibt:

$$S_{ik}^{(1)} W_k^{(0)} + W_{ik}^{(1)} = W_i^{(0)} S_{ik}^{(1)} + H_{ik}^{(1)}. \tag{45,11}$$

Da $\mathfrak{W}^{(1)}$ eine Diagonalmatrix ist, reduziert sich (45,11) für $i = k$ auf

$$H_{kk}^{(1)} = W_k^{(1)} \tag{45,12}$$

und für $i \neq k$ auf

$$S_{ik}^{(1)} (W_k^{(0)} - W_i^{(0)}) = H_{ik}^{(1)},$$

da ja alle Elemente von $\mathfrak{W}^{(1)}$ für $i \neq k$ gleich Null sind; Umformung ergibt

$$S_{ik}^{(1)} = \frac{H_{ik}^{(1)}}{W_k^{(0)} - W_i^{(0)}}. \tag{45,13}$$

Für $\mathfrak{S}^{(1)\dagger}$ findet man, da $\mathfrak{H}^{(1)}$ hermitisch ist,

$$S_{ik}^{(1)\dagger} = \frac{H_{ik}^{(1)}}{W_i^{(0)} - W_k^{(0)}} = -S_{ik}^{(1)}. \tag{45,14}$$

Damit ist die Matrix $\mathfrak{W}^{(1)}$ völlig bestimmt. Von der Matrix $\mathfrak{S}^{(1)}$ haben wir alle Elemente außerhalb der Diagonale.

Ihre Diagonalelemente bleiben willkürlich und setzen sie gleich Null, d. h.

$$S_{kk}^{(1)} = 0. \tag{45,15}$$

Die zweite Näherung. Die Glieder mit λ^2 von (45,5) liefern eine weitere Näherungsgleichung:

$$\mathfrak{S}^{(2)} \mathfrak{W}^{(0)} + \mathfrak{S}^{(1)} \mathfrak{W}^{(1)} + \mathfrak{S}^{(0)} \mathfrak{W}^{(2)} = \mathfrak{W}^{(1)} \mathfrak{S}^{(2)} + \mathfrak{H}^{(1)} \mathfrak{S}^{(1)} + \mathfrak{H}^{(2)} \mathfrak{S}^{(0)}. \tag{45,16}$$

Wird berücksichtigt, daß $\mathfrak{S}^{(0)} = \mathfrak{E}$, so folgt

$$\mathfrak{S}^{(2)} \mathfrak{W}^{(0)} + \mathfrak{S}^{(1)} \mathfrak{W}^{(1)} + \mathfrak{W}^{(2)} = \mathfrak{W}^{(0)} \mathfrak{S}^{(2)} + \mathfrak{H}^{(1)} \mathfrak{S}^{(1)} + \mathfrak{H}^{(2)}. \tag{45,17}$$

Wegen (45,12) und (45,15) erhält man für die Diagonalelemente

$$S_{kk}^{(2)} W_k^{(0)} + S_{kk}^{(1)} W_k^{(1)} + W_k^{(2)} = W_k^{(0)} S_{kk}^{(2)} + \sum_\nu H_{k\nu}^{(1)} S_{\nu k}^{(1)} + H_{kk}^{(2)},$$

d. h.

$$W_k^{(2)} = H_{kk}^{(2)} + \sum_\nu H_{k\nu}^{(1)} S_{\nu k}^{(1)},$$

oder wegen (45,13)

$$W_k^{(2)} = H_{kk}^{(2)} + \sum_\nu \frac{H_{k\nu}^{(1)} H_{\nu k}^{(1)}}{W_k^{(0)} - W_\nu^{(0)}}. \tag{45,18}$$

Für die Elemente außerhalb der Diagonale folgt

$$S_{ik}^{(2)} W_k^{(0)} + S_{ik}^{(1)} W_k^{(1)} = W_i^{(0)} S_{ik}^{(2)} + \sum_\nu H_{i\nu}^{(1)} S_{\nu k}^{(1)} + H_{ik}^{(2)},$$

d. h.

$$S_{ik}^{(2)} = \frac{H_{ik}^{(2)} + \sum_\nu H_{i\nu}^{(1)} S_{\nu k}^{(1)} - S_{ik}^{(1)} W_k^{(1)}}{W_k^{(0)} - W_i^{(0)}}. \tag{45,19}$$

Die Diagonalelemente von $\mathfrak{S}^{(2)}$ bleiben willkürlich und werden gleich Null gesetzt.

Das beschriebene Näherungsverfahren kann beliebig fortgesetzt werden. Damit hat man ein systematisches Verfahren gewonnen, mit dem ein quantentheoretisches Problem auf ein einfacheres zurückgeführt werden kann. Voraussetzung war aber, daß in der nullten Näherung keine Entartung vorliegt.

46. Störungsrechnung entarteter Systeme

Es wird jetzt die Voraussetzung fallen gelassen, daß ungestörte Systeme nicht entartet sind. Sind einige der $W_k^{(0)}$ einander gleich, so versagt bereits der erste Schritt der Approximation. Liegt eine r-fache Entartung vor, so wird der Eigenwert r-fach gezählt. Eine der wichtigsten Entartungen tritt z. B. bei einem Elektron im Zentralfeld ein, wie sie beim Leuchtelektron der Alkali beobachtet wird. Die Energiematrix, in der die einfachen S-Terme, die 3-fachen P-Terme, die 5-fachen D-Terme, ... zu unterscheiden sind, hat dann folgende Gestalt:

$$\mathfrak{W}^{(0)} = \begin{pmatrix}
W_{1S} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & W_{2S} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & W_{2P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & W_{2P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W_{2P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_{3S} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_{3P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_{3P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_{3P} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_{3D} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_{3D} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_{3D} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_{3D} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_{3D} \\
 & & & & & & & & & & & & & \text{usw.}
\end{pmatrix} \tag{46,1}$$

a) Die Transformation entarteter Matrizen durch eine unitäre Stufenmatrix

Ist ein hermitisches Matrizensystem $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{q}_0$ bekannt, das den Vertauschungsregeln genügt und die Hamilton-Funktion zu einer Diagonalmatrix $\mathfrak{W}$ macht, so entsteht aus ihm durch eine unitäre Transformation $\mathfrak{S}^{(0)}$ ein anderes hermitisches Matrizensystem $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, das ebenfalls den Vertauschungsregeln genügt. Das System $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ ist mit dem System $\mathfrak{p}_0, \mathfrak{q}_0$ gleichwertig, wenn es in die Hamilton-Funktion eingesetzt dieselbe Diagonalmatrix $\mathfrak{W}$ liefert. $\mathfrak{S}^{(0)}$ muß ohne Entartung eine Phasenmatrix sein und es gibt nur ein brauchbares Matrizensystem.

Wenn Entartung vorliegt, so folgt aus

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{S}^{(0)\dagger}\,\mathfrak{W}\,\mathfrak{S}^{(0)} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{S}^{(0)}\,\mathfrak{W} = \mathfrak{W}\,\mathfrak{S}^{(0)}, \tag{46,2}$$

für die Elemente

$$S_{ik}^{(0)}\,W_k = W_i\,S_{ik}^{(0)}.$$

Ist $W_i = W_k$, so braucht $S_{ik}^{(0)}$ nicht zu verschwinden. In diesem Fall bleiben die $S_{ik}^{(0)}$ beliebig und unterliegen nur Einschränkungen, die aus dem unitären Charakter von $\mathfrak{S}^{(0)}$ herrühren. Wenn dagegen $W_i \neq W_k$ ist, verschwinden alle $S_{ik}^{(0)}$.

Eine solche Matrix $\mathfrak{S}^{(0)}$ ist eine unitäre Stufenmatrix, deren Stufengröße dem Grad der Entartung entspricht.

Z. B. gehört zur Matrix (46,1) der Alkaliterme die Stufenmatrix

1S	2S	2P			3S	3P			3D				
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	·	·	·	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	·	·	·	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	·	·	·	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	·	·	·	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	·	·	·	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	·	·	·	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	·	·	·	·	·
0	0	0	0	0	0	0	0	0	·	·	·	·	·
0	0	0	0	0	0	0	0	0	·	·	·	·	·
0	0	0	0	0	0	0	0	0	·	·	·	·	·
0	0	0	0	0	0	0	0	0	·	·	·	·	·

usw. (46,3)

An der Stelle der Punkte können nicht verschwindende Elemente stehen.

b) Das Störungsschema

Ist in einer Hamilton-Funktion $H = H^{(0)} + \lambda\,H^{(1)} + \lambda^2\,H^{(2)} + \cdots$ die Energiematrix der nullten Näherung $\mathfrak{H}^{(0)} = \mathfrak{W}^{(0)}$ entartet, so hat man aus der Gleichung (45,5) wieder die Matrizen $\mathfrak{S}^{(0)}, \mathfrak{S}^{(1)}, \mathfrak{S}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{W}^{(1)}, \mathfrak{W}^{(2)}, \ldots$ zu bestimmen.

In der nullten Näherung erhält man jetzt aber nicht $\mathfrak{S}^{(0)} = \mathfrak{E}$, da $\mathfrak{S}^{(0)}$ eine unitäre Stufenmatrix ist, die nur aus der ersten Näherung bestimmt werden kann.

Die Matrix $\mathfrak{H}^{(1)}$ wird nun, um die erste Näherung durchzuführen, in die Summe zweier Matrizen zerlegt:

$$\mathfrak{H}^{(1)} = \mathfrak{H}^{(11)} + \mathfrak{H}^{(12)}. \tag{46,4}$$

Alle Elemente von $\mathfrak{H}^{(1)}$, die in die Diagonalstufen von $\mathfrak{S}^{(0)}$ fallen, nehmen wir zu $\mathfrak{H}^{(11)}$, alle anderen zu $\mathfrak{H}^{(12)}$,

Entsprechend (45,9) wird nun

$$\mathfrak{S}^{(0)}\mathfrak{W}^{(1)} + \mathfrak{S}^{(1)}\mathfrak{W}^{(0)} = \mathfrak{W}^{(0)}\mathfrak{S}^{(1)} + \mathfrak{H}^{(11)}\mathfrak{S}^{(0)} + \mathfrak{H}^{(12)}\mathfrak{S}^{(0)}. \tag{46,5}$$

Entsprechend der gemachten Voraussetzung entstehen daher zur Bestimmung von $\mathfrak{S}^{(0)}$, $\mathfrak{W}^{(1)}$ bzw. $\mathfrak{S}^{(1)}$ die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{S}^{(0)}\mathfrak{W}^{(1)} = \mathfrak{H}^{(11)}\mathfrak{S}^{(0)} \tag{46,6}$$

bzw.

$$\mathfrak{S}^{(1)}\mathfrak{W}^{(0)} = \mathfrak{W}^{(0)}\mathfrak{S}^{(1)} + \mathfrak{H}^{(12)}\mathfrak{S}^{(0)}. \tag{46,7}$$

In (46,6) verschwinden alle Elemente außerhalb der Stufen von $\mathfrak{S}^{(0)}$, während die Elemente von (46,7) gerade innerhalb dieser Stufen verschwinden. (46,6) bedeutet, daß $\mathfrak{H}^{(11)}$ durch $\mathfrak{S}^{(0)}$ auf Hauptachsen transformiert wird.

Für die Elemente erhält man

$$S_{ik}^{(0)} W_k^{(1)} = \sum_r H_{ir}^{(11)} S_{rk}^{(0)}. \tag{46,8}$$

Das sind mehrere Systeme linearer homogener Gleichungen für die $S_{ik}^{(0)}$, die zu den entsprechenden Stufen gehören. Daher wird die Determinante der Säkulargleichung das Produkt der Stufendeterminanten

$$\Pi\,|\,\mathfrak{H}^{(11)} - \mathfrak{W}\,| = 0 \tag{46,9}$$

und die Säkulargleichung zerfällt daher in einzelne Gleichungen, von denen jede zu einer Stufe gehört:

$$|\,\mathfrak{H}^{(11)} - \mathfrak{W}\,| = 0. \tag{46,10}$$

Ist die Entartung N-fach, so liefert jede Stufe eine Gleichung von der N-ten Ordnung. Man erhält also aus (46,10) die Eigenwerte $W_k^{(1)}$ und aus (46,8) die Elemente $S_{ik}^{(0)}$. $S^{(1)}$ kann dann aus (46,7) ermittelt werden; das ik-te Element lautet

$$S_{ik}^{(1)} W_k^{(0)} = W_i^{(0)} S_{ik}^{(1)} + \sum_r H_{ir}^{(12)} S_{rk}^{(0)}. \tag{46,11}$$

Für $W_i^{(0)} \neq W_k^{(0)}$ folgt

$$S_{ik}^{(1)} = \frac{\sum_r H_{ir}^{(12)} S_{rk}^{(0)}}{W_k^{(0)} - W_i^{(0)}} \tag{46,12}$$

Der Index r läuft über die Entartungsstufe, zu der auch k gehört. Nicht bestimmt können die Elemente von $S_{ik}^{(1)}$ in den Stufen von $S^{(0)}$ werden; sie werden gleich Null gesetzt, da sie beliebig bleiben. Waren $\mathfrak{p}^{(0)}$ und $\mathfrak{q}^{(0)}$ vorgegeben, so können nunmehr die gesuchten Matrizen angegeben werden

$$\mathfrak{p}^{(0)} = (\mathfrak{S}^{(0)\dagger} + \lambda\,\mathfrak{S}^{(1)\dagger})\;\mathfrak{p}^{(0)}\,(\mathfrak{S}^{(0)} + \lambda\,\mathfrak{S}^{(1)}) \tag{46,13}$$

$$\mathfrak{q}^{(1)} = (\mathfrak{S}^{(0)\dagger} + \lambda\,\mathfrak{S}^{(1)\dagger})\;\mathfrak{q}^{(0)}\,(\mathfrak{S}^{(0)} + \lambda\,\mathfrak{S}^{(1)}). \tag{46,14}$$

Zweite Näherung. Hat die Säkulargleichung (46,9) noch mehrere gleiche Wurzeln, dann zeigt auch $\mathfrak{W}^{(1)}$ noch Entartung; es bleibt dann bei der Bestimmung von $\mathfrak{S}^{(0)}$ in erster Näherung noch eine unitäre Stufenmatrix $\mathfrak{s}^{(0)}$ willkürlich, die der Entartung von $\mathfrak{W}^{(1)}$ entspricht, d. h. es ist

$$\mathfrak{s}^{(0)}\,\mathfrak{W}^{(1)} = \mathfrak{W}^{(1)}\,\mathfrak{s}^{(0)}. \tag{46,15}$$

Wir führen nun zunächst die Transformation mit einer Stufenmatrix $\mathfrak{S}^{(0)}$ aus, deren unbestimmte Elemente in der Diagonale gleich Eins, außerhalb gleich Null gesetzt werden,

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &= \mathfrak{S}^{(0)\dagger}\,\mathfrak{p}^{(0)}\,\mathfrak{S}^{(0)} \\ \mathfrak{q} &= \mathfrak{S}^{(0)\dagger}\,\mathfrak{q}^{(0)}\,\mathfrak{S}^{(0)} \\ \mathfrak{w} &= \mathfrak{S}^{(0)\dagger}\,(\mathfrak{W}^{(0)} + \lambda\,\mathfrak{W}^{(11)} + \lambda\,\mathfrak{W}^{(12)} + \lambda^2\,\mathfrak{W}^{(2)})\,\mathfrak{S}^{(0)} \\ &= \mathfrak{W}^{(0)} + \lambda\,\mathfrak{W}^{(1)} + \lambda\,\mathfrak{w}^{(12)} + \lambda^2\,\mathfrak{w}^{(2)}, \end{aligned} \tag{46,16}$$

wobei $\mathfrak{w}$ die Energiematrix ist. In ihr sind $\mathfrak{W}^{(0)}$ und $\mathfrak{W}^{(1)}$ Diagonalmatrizen und $\mathfrak{w}^{(12)}$ hat keine Elemente in den Stufen von $\mathfrak{S}^{(0)}$.

Durch

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}^{(0)} + \lambda\,\mathfrak{s}^{(1)} + \lambda^2\,\mathfrak{s}^{(2)} + \cdots \tag{46,17}$$

soll nun $\mathfrak{w}$ auf Diagonalform transformiert werden.

Also wird

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{s}^{(0)} + \lambda\,\mathfrak{s}^{(1)} + \lambda^2\,\mathfrak{s}^{(2)} + \cdots)\;(\mathfrak{W}^{(0)} + \lambda\,\mathfrak{W}^{(1)} + \lambda^2\,\mathfrak{W}^{(2)} + \cdots) \\ =\; &(\mathfrak{W}^{(0)} + \lambda\,\mathfrak{W}^{(1)} + \lambda\,\mathfrak{w}^{(12)} + \lambda^2\,\mathfrak{w}^{(2)} + \cdots)\;(\mathfrak{s}^{(0)} + \lambda\,\mathfrak{s}^{(1)} + \lambda^2\,\mathfrak{s}^{(2)} + \cdots) \end{aligned} \tag{46,18}$$

Die nullte Näherung ist trivial:

$$\mathfrak{s}^{(0)}\,\mathfrak{W}^{(0)} = \mathfrak{W}^{(0)}\,\mathfrak{s}^{(0)}. \tag{46,19}$$

Die erste Näherung ergibt

$$\mathfrak{s}^{(0)}\,\mathfrak{W}^{(1)} + \mathfrak{s}^{(1)}\,\mathfrak{W}^{(0)} = \mathfrak{W}^{(0)}\,\mathfrak{s}^{(1)} + \mathfrak{W}^{(1)}\,\mathfrak{s}^{(0)} + \mathfrak{w}^{(12)}\,\mathfrak{s}^{(0)} \tag{46,20}$$

und liefert zur Untersuchung der Elemente in den Stufen von $\mathfrak{S}^{(0)}$

$$\mathfrak{s}^{(0)}\,\mathfrak{W}^{(1)} = \mathfrak{W}^{(1)}\,\mathfrak{s}^{(0)} \qquad (46,15)$$

und den Rest

$$\mathfrak{s}^{(1)}\,\mathfrak{W}^{(0)} = \mathfrak{W}^{(0)}\,\mathfrak{s}^{(1)} + \mathfrak{w}^{(12)}\,\mathfrak{s}^{(0)}, \tag{46,21}$$

der für die Elemente ergibt

$$s_{ik}^{(1)}\,W_k^{(0)} = W_i^{(0)}\,s_{ik}^{(1)} + \sum_r w_{ir}^{(12)}\,s_{rk}^{(0)}. \tag{46,22}$$

Ist $W_i^{(0)} = W_k^{(0)}$, so ist die Gleichung stets erfüllt, da entweder $w_{ir}^{(12)}$ verschwindet, wenn r zur gleichen Stufe wie i und k gehört oder $s_{rk}^{(0)}$ gleich Null ist, wenn r zu einer anderen Stufe gehört. Außerhalb der Stufen von $\mathfrak{S}^{(0)}$ ist

$$s_{ik}^{(1)} = \frac{\sum_r w_{ir}^{(12)}\,s_{rk}^{(0)}}{W_k^{(0)} - W_i^{(0)}}. \tag{46,23}$$

Die zweite Näherung ergibt

$$\mathfrak{s}^{(0)}\,\mathfrak{W}^{(2)} + \mathfrak{s}^{(1)}\,\mathfrak{W}^{(1)} + \mathfrak{s}^{(2)}\,\mathfrak{W}^{(0)} = \mathfrak{W}^{(0)}\,\mathfrak{s}^{(2)} + \mathfrak{W}^{(1)}\,\mathfrak{s}^{(1)} + \mathfrak{w}^{(12)}\,\mathfrak{s}^{(1)} + \mathfrak{w}^{(2)}\,\mathfrak{s}^{(1)} \tag{46,24}$$

oder für die Elemente

$$s_{ik}^{(0)} W_k^{(2)} + s_{ik}^{(1)} W_k^{(1)} + s_{ik}^{(2)} W_k^{(0)} = W_i^{(0)} s_{ik}^{(2)} + W_i^{(1)} s_{ik}^{(1)} + \sum_r w_{ir}^{(12)} s_{rk}^{(1)} + \sum_r w_{ir}^{(2)} s_{rk}^{(0)}. \quad (46,25)$$

Ist $W_k^{(0)} = W_i^{(0)}$ und $W_k^{(1)} = W_i^{(1)}$, so vereinfacht sich (46,25) zu

$$s_{ik}^{(0)} W_k^{(2)} = \sum_r w_{ir}^{(12)} s_{rk}^{(1)} + \sum_r w_{ir}^{(2)} s_{rk}^{(0)}. \quad (46,26)$$

Setzt man (46,23) ein, so erhält man

$$s_{ik}^{(0)} W_k^{(2)} = \sum_{r,s} \frac{w_{ir}^{(12)} w_{rs}^{(12)} s_{sk}^{(0)}}{W_k^{(0)} - W_r^{(0)}} + \sum_r w_{ir}^{(2)} s_{rk}^{(0)} = \sum_s s_{sk}^{(0)} \left(w_{is}^{(2)} + \sum_r \frac{w_{ir}^{(12)} \cdot w_{rs}^{(12)}}{W_k^{(0)} - W_r^{(0)}} \right). \quad (46,27)$$

Aus diesem System linearer Gleichungen kann bei festem k $s_{ik}^{(0)}$ und $W_k^{(0)}$ gewonnen werden.

Ist $W_k^{(0)} = W_i^{(0)}$, aber $W_k^{(1)} \neq W_i^{(1)}$, so ist $s_{ik}^{(0)} = 0$ und (46,25) reduziert sich auf

$$s_{ik}^{(1)} W_k^{(1)} = W_i^{(1)} s_{ik}^{(1)} + \sum_r w_{ir}^{(12)} s_{rk}^{(1)} + \sum_r w_{ir}^{(2)} s_{rk}^{(0)}. \quad (46,28)$$

Damit sind die Elemente von $\mathfrak{s}^{(1)}$ bestimmt, die in den Stufen von $\mathfrak{S}^{(0)}$, aber außerhalb der Stufen von $\mathfrak{s}^{(0)}$ liegen.

Ist $W_k^{(0)} \neq W_i^{(0)}$, so folgt aus (46,25)

$$s_{ik}^{(1)} W_k^{(1)} + s_{ik}^{(2)} W_k^{(0)} = W_i^{(0)} s_{ik}^{(2)} + W_i^{(1)} s_{ik}^{(1)} + \sum_r w_{ir}^{(12)} s_{rk}^{(1)} + \sum_r w_{ir}^{(2)} s_{rk}^{(0)}. \quad (46,29)$$

Hieraus kann man die Elemente von $\mathfrak{s}^{(2)}$ bestimmen, soweit sie außerhalb der ursprünglichen Entartungsstufen liegen, wenn man die Elemente von $\mathfrak{s}^{(0)}$ und $\mathfrak{s}^{(1)}$ einsetzt.

Alle Formeln vereinfachen sich bedeutend, wenn $\mathfrak{W}_k^{(0)}$ oder wenigstens $\mathfrak{W}_k^{(1)}$ ein einfacher Eigenwert ist. Es verschwinden nämlich alle $s_{ik}^{(0)}$ außer dem Diagonalelement $s_{kk}^{(0)} = 1$. Man erhält dann statt (46,23)

$$s_{ik}^{(1)} = \frac{w_{ik}^{(12)}}{W_k^{(0)} - W_i^{(0)}}, \quad (46,30)$$

und aus (46,27) bestimmt man

$$W_k^{(2)} = w_{kk}^{(2)} + \sum_r \frac{w_{kr}^{(12)} w_{rk}^{(12)}}{W_k^{(0)} - W_r^{(0)}}. \quad (46,31)$$

In praktisch vorkommenden Fällen wird man, um eine Erleichterung des Rechnungsganges zu erhalten, die besondere Form der Entartung berücksichtigen.

47. Drehimpuls

Wie in der klassischen Mechanik werde der Drehimpuls $\mathfrak{M}$ eines Massenpunktes mit den Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ und den translatorischen Impulsen $\mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_z$ durch

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{p} \quad (47,1)$$

definiert, d. h. es ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_x &= \mathfrak{y}\,\mathfrak{p}_z - \mathfrak{z}\,\mathfrak{p}_y\,, \\ \mathfrak{M}_y &= \mathfrak{z}\,\mathfrak{p}_x - \mathfrak{x}\,\mathfrak{p}_z\,, \\ \mathfrak{M}_z &= \mathfrak{x}\,\mathfrak{p}_y - \mathfrak{y}\,\mathfrak{p}_x\,. \end{aligned} \tag{47,1'}$$

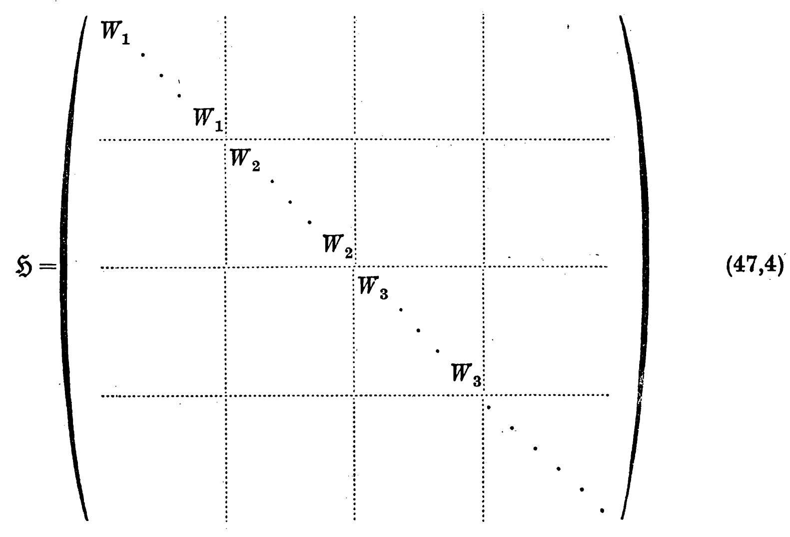
Aus den kanonischen Vertauschungsregeln folgt

$$\begin{aligned} [\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y] &= -\frac{h}{2\pi i}\mathfrak{M}_z\,, \\ [\mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z] &= -\frac{h}{2\pi i}\mathfrak{M}_x\,, \\ [\mathfrak{M}_z, \mathfrak{M}_x] &= -\frac{h}{2\pi i}\mathfrak{M}_y\,. \end{aligned} \tag{47,2}$$

Befindet sich nun ein Atom im feldfreien Raum, d. h. sind alle drei Drehimpulskomponenten zeitlich konstant, so ist

$$\dot{\mathfrak{M}} = 0\,. \tag{47,3}$$

Wäre dieses Atom ein nichtentartetes System, so müßte man aus (47,3) schließen, daß alle diese Matrizen $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ Diagonalmatrizen, also miteinander vertauschbar wären. Dies steht aber in Widerspruch zu (47,3), was bedeutet, daß das System notwendigerweise entartet ist, d. h. aber die Energiematrix hat einen oder mehrere Eigenwerte, die gleich W_1 sind, und einen oder mehrere, die gleich W_2 sind, usw. ($W_m \neq W_n$ für $m \neq n$). Sind die Diagonalelemente so angeordnet, daß erst alle W_1 folgen, dann alle W_2 usw., d. h. nach den stationären Zuständen des entarteten Systems geordnet sind, so läßt sich die Energiematrix als Übermatrix schreiben mit den Untermatrizen W_1, W_2 ... Wenn es gerade g_1 Eigenwerte von W_1 gibt, so ist g_1 das statistische Gewicht des Zustandes mit der Energie W_1; eine äußere Störung kann diesen Zustand in g_1 Zustände aufspalten. $\mathfrak{H}$ hat also folgende Gestalt:



(47,4)

Jede der Matrizen $\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z$ muß nun die Form (47,4) haben. Führt man nun für die Untermatrizen $\mathfrak{M}_x^{(r)}, \mathfrak{M}_y^{(r)}, \mathfrak{M}_z^{(r)}$ die Bezeichnungen ein

$$\mathfrak{M}_x^{(r)} = \frac{h}{2\pi}\mathfrak{m}_x, \qquad \mathfrak{M}_y^{(r)} = \frac{h}{2\pi}\mathfrak{m}_y, \qquad \mathfrak{M}_z^{(r)} = \frac{h}{2\pi}\mathfrak{m}_z, \tag{47,5}$$

so lautet also die Aufgabe, alle irrudiziblen hermitischen Matrizensysteme $\mathfrak{m}_x$, $\mathfrak{m}_y$, $\mathfrak{m}_z$ zu bestimmen, die die Eigenschaft haben

$$\begin{aligned} [\mathfrak{m}_x, \mathfrak{m}_y] &= i\,\mathfrak{m}_z, \\ [\mathfrak{m}_y, \mathfrak{m}_z] &= i\,\mathfrak{m}_x, \\ [\mathfrak{m}_z, \mathfrak{m}_x] &= i\,\mathfrak{m}_y. \end{aligned} \tag{47,6}$$

Mittels der unitären Matrix $\mathfrak{U}$ läßt sich $\mathfrak{m}_x, \mathfrak{m}_y, m_z$ unitär transformieren zu

$$\mathfrak{m}_x' = \mathfrak{U}\,\mathfrak{m}_x\,\mathfrak{U}^{-1}, \quad \mathfrak{m}_y' = \mathfrak{U}\,\mathfrak{m}_y\,\mathfrak{U}^{-1}, \quad \mathfrak{m}_z' = \mathfrak{U}\,\mathfrak{m}_x\,\mathfrak{U}^{-1}. \tag{47,7}$$

Die Willkür der unitären Transformation wird so gewählt, daß $\mathfrak{m}_z$ eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten m wird:

$$\mathfrak{m}_z(rs) = m\,\delta_{rs}. \tag{47,8}$$

Mit
$$\mu = \mathfrak{m}_x + i\,\mathfrak{m}_y,$$
$$\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}_x^2 + \mathfrak{m}_y^2 + \mathfrak{m}_z^2 \tag{47,9}$$

erhält man die Vertauschungsrelationen

$$\begin{gathered} \mathfrak{m}_z\,\mu - \mu\,\mathfrak{m}_z = \mu, \\ \mu\,\mu^\dagger - \mu^\dagger\,\mu = 2\,\mathfrak{m}_z, \\ [\mathfrak{m}^2, \mathfrak{m}_x] = [\mathfrak{m}^2, \mathfrak{m}_y] = [\mathfrak{m}^2, \mathfrak{m}_z] = 0. \end{gathered} \tag{47,10}$$

Da nun $\mathfrak{m}^2$ proportional der Einheitsmatrix ist,

$$\mathfrak{m}^2 = \omega^2\,\mathfrak{E}, \tag{47,11}$$

so ergibt sich der zu dem betrachteten Bestandteil $\mathfrak{m}$ gehörige Eigenwert von $\mathfrak{M}^2$ zu

$$M_{(n)}^2 = \frac{h^2}{4\pi^2}\,\omega^2. \tag{47,12}$$

Genau wie beim harmonischen Oszillator bilden die verschiedenen Eigenwerte m von $\mathfrak{m}_z$ eine lückenlose arithmetische Reihe mit der Differenz 1 und zwar ist stets $|m| \leq \omega$.

Betrachten wir wegen der Vielfachheit der Eigenwerte von $\mathfrak{m}_z$ nun $\mathfrak{m}_x, \mathfrak{m}_y$ als Untermatrizen, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\mu = (\mu^{(r,s)}), \quad \mu^\dagger = (\mu^{\dagger(r,s)}), \tag{47,13}$$

$$\begin{aligned} \mu^{(r,s)} &= 0, \quad \text{wenn} \quad r - s \neq 1 \\ \mu^{\dagger(r,s)} &= 0, \quad \text{wenn} \quad r - s \neq -1, \end{aligned} \tag{47,14}$$

$$\mu\,\mu^\dagger + \mu^\dagger\,\mu = 2\,(\mathfrak{m}_x^2 + \mathfrak{m}_y^2) = 2\,(\mathfrak{m}^2 - \mathfrak{m}_z^2) \tag{47,15}$$

oder wegen (47,10)

$$\begin{aligned} \mu^\dagger \mu &= \mathfrak{m}^2 - \mathfrak{m}_z (\mathfrak{m}_z + 1) \\ \mu \mu^\dagger &= \mathfrak{m}^2 - \mathfrak{m}_z (\mathfrak{m}_z - 1) \end{aligned} \tag{47,16}$$

oder wegen (47,14)

$$\begin{aligned} \mu^{\dagger (m, m+1)} \mu^{(m+1, m)} &= \{\omega^2 - m (m+1)\} \mathfrak{E}^{(m)}, \\ \mu^{(m+1, m)} \mu^{\dagger (m+1, m)} &= \{\omega^2 - m (m+1)\} \mathfrak{E}^{(m+1)}. \end{aligned} \tag{47,17}$$

Nun besitzen alle Eigenwerte m die Vielfachheit 1. Daraus folgt: Bildet man nach (47,10) die Spur, so hat die linke Seite wegen der Endlichkeit der Matrizen den Wert Null; die Summe aller Eigenwerte m von $\mathfrak{m}_z$ ist aber gleich Null; die arithmetische Reihe der m muß symmetrisch zur Null liegen, d. h. es ist

$$m = -j, \quad -(j+1), \ldots, \quad j-1, j \tag{47,18}$$

und

$$j = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{oder} \quad j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$$

Aus (47,17) folgt nun wegen $\mu^\dagger \mu (jj) = 0$

$$\omega^2 = j (j+1) \tag{47,19}$$

und damit sind nach (47,12) die Eigenwerte von $\mathfrak{M}^2$ bestimmt zu

$$M^2_{(n)} = \frac{h^2}{4\pi^2} j (j+1). \tag{47,20}$$

Weiterhin ergibt sich aus (47,17)

$$|\mu (m+1, m)|^2 = j (j+1) - m (m+1), \qquad -j \leq m < j,$$

oder bei geeigneter Wahl der Phasenkonstanten

$$\mu (m+1, m) = \sqrt{j (j+1) - m (m+1)} \tag{47,21}$$

während

$$\mu (m', m) = 0, \quad \text{wenn} \quad m' - m \neq 1.$$

Damit ist für jeden Grad $g = 2j + 1$ eine Lösung gegeben.

Beispiel:

$$j = 0 \qquad \mathfrak{m}_z = (0) \qquad \mu = (0)$$

$$j = \tfrac{1}{2} \qquad \mathfrak{m}_z = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$j = 1 \qquad \mathfrak{m}_z = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ist das Atom einem richtungsquantelndem äußeren Feld ausgesetzt, das alle Entartungen aufhebt und dessen Richtung parallel zur z-Achse verläuft, so

bleibt $\dot{\mathfrak{M}}_z = 0$ und $\mathfrak{M}_z$ wird Diagonalmatrix. Die Eigenwerte sind gleich $m\frac{h}{2\pi}$, wobei die „magnetische Quantenzahl“ m entweder ganzzahlig oder halbzahlig ist.

Dem Elektron muß noch außer den Koordinaten und Impulsen ein zusätzliches Eigenmoment zugeschrieben werden („Spinmoment“). Der Gesamtdrehimpuls ist daher

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{r} \times \mathfrak{p} + \frac{h}{2\pi}\mathfrak{s}, \tag{47,22}$$

die $\mathfrak{s}_x, \mathfrak{s}_y, \mathfrak{s}_z$ sind dabei drei Matrizen, die mit allen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, \mathfrak{p}_x, \mathfrak{p}_y, \mathfrak{p}_z$ vertauschbar sind. Sie erfüllen die Relationen

$$\begin{aligned} [\mathfrak{s}_x, \mathfrak{s}_y] &= i\,\mathfrak{s}_z, \\ [\mathfrak{s}_y, \mathfrak{s}_z] &= i\,\mathfrak{s}_x, \\ [\mathfrak{s}_z, \mathfrak{s}_x] &= i\,\mathfrak{s}_y. \end{aligned} \tag{47,23}$$

Da $\mathfrak{s}_z$ nur die Eigenwerte $\pm\frac{1}{2}$ besitzt, wird

$$\mathfrak{s}_x^2 + \mathfrak{s}_y^2 + \mathfrak{s}_z^2 = \tfrac{1}{4}\mathfrak{E}. \tag{47,24}$$

48. STARCK-Effekt

Wirkt auf ein Elektron, das sich in einem Atom befindet, ein homogenes elektrisches Feld, so lautet die HAMILTON-Funktion des Elektrons im Feld

$$H = H^{(0)} - e\,|\mathfrak{E}|\,z, \tag{48,1}$$

wenn $H^{(0)}$ die HAMILTON-Funktion ohne Feld bedeutet und wenn die z-Achse in Richtung des elektrischen Feldes $\mathfrak{E}$ gelegt wird. Die Rechnung wird nun durchgeführt nach den in den Ziffern 45 u. 46 angegebenen Verfahren. Wir setzen nun

$$\lambda = -e\,|\mathfrak{E}|, \quad \mathfrak{H}^{(1)} = \mathfrak{z}. \tag{48,2}$$

a) Der quadratische STARCK-Effekt

Zunächst werde der STARCK-Effekt an den Termen untersucht, bei denen der Elektronenspin keine Rolle spielt. Dazu gehören die Singuletterme und solche mit geringer Multiplettaufspaltung. Die Matrix der ungestörten Eigenwerte ist die Matrix $\mathfrak{W}^{(0)}$ Gleichung (46,1). Die Matrix $\mathfrak{H}^{(1)} = \mathfrak{z}^{(0)}$ kann man auf folgende Weise gewinnen: Seien die X normierte Funktionen einer Radialkoordinate r (d. h. den Eigenwerten zugeordnete Eigenfunktionen), dann können Größen r_{ik} definiert werden:

$$r_{ik} = r_{ki} = \int_0^\infty X_i X_k r^3\,dr. \tag{48,3}$$

Aus ihnen kann nun eine Koordinatenmatrix

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i}\mathfrak{x} + \mathfrak{j}\mathfrak{y} + \mathfrak{k}\mathfrak{z} \tag{48,4}$$

konstruiert werden, die z. B. für das Leuchtelektron eines Alkaliatoms folgende Gestalt hat (siehe Anmerkung 1)

$\mathfrak{r} =$ (48,5)

	1S	2P			3D				
1S	0	$\mathfrak{k}\frac{r_{SP}}{\sqrt{3}}$	$\mathfrak{j}\frac{r_{SP}}{\sqrt{3}}$	$\mathfrak{i}\frac{r_{SP}}{\sqrt{3}}$	0	0	0	0	0
2P	$\mathfrak{k}\frac{r_{SP}}{\sqrt{3}}$	0	0	0	$\mathfrak{k}\frac{2r_{PD}}{\sqrt{15}}$	$\mathfrak{j}\frac{r_{PD}}{\sqrt{5}}$	$\mathfrak{i}\frac{r_{PD}}{\sqrt{5}}$	0	0
	$\mathfrak{j}\frac{r_{SP}}{\sqrt{3}}$	0	0	0	$-\mathfrak{j}\frac{r_{PD}}{\sqrt{15}}$	$\mathfrak{k}\frac{r_{PD}}{\sqrt{5}}$	0	$\mathfrak{i}\frac{r_{PD}}{\sqrt{5}}$	$-\mathfrak{j}\frac{r_{PD}}{\sqrt{5}}$
	$\mathfrak{i}\frac{r_{SP}}{\sqrt{3}}$	0	0	0	$-\mathfrak{i}\frac{r_{PD}}{\sqrt{15}}$	0	$\mathfrak{k}\frac{r_{PD}}{\sqrt{5}}$	$\mathfrak{j}\frac{r_{PD}}{\sqrt{5}}$	$-\mathfrak{i}\frac{r_{PD}}{\sqrt{5}}$
3D	0	$\mathfrak{k}\frac{2r_{PD}}{\sqrt{15}}$	$-\mathfrak{j}\frac{r_{PD}}{\sqrt{15}}$	$-\mathfrak{i}\frac{r_{PD}}{\sqrt{15}}$	0	0	0	0	0
	0	$\mathfrak{j}\frac{r_{PD}}{\sqrt{5}}$	$\mathfrak{k}\frac{r_{PD}}{\sqrt{5}}$	0	0	0	0	0	0
	0	$\mathfrak{i}\frac{r_{PD}}{\sqrt{5}}$	0	$\mathfrak{k}\frac{r_{PD}}{\sqrt{5}}$	0	0	0	0	0
	0	0	$\mathfrak{i}\frac{r_{PD}}{\sqrt{5}}$	$\mathfrak{j}\frac{r_{PD}}{\sqrt{5}}$	0	0	0	0	0
	0	0	$-\mathfrak{j}\frac{r_{PD}}{\sqrt{5}}$	$\mathfrak{i}\frac{r_{PD}}{\sqrt{5}}$	0	0	0	0	0

Aus ihr kann für $\mathfrak{x} = \mathfrak{y} = 0$ die Matrix $\mathfrak{z}^{(0)}$ abgeleitet werden:

$\mathfrak{z}^{(0)} =$ (48,6)

	S	P			D				
S	0	$\frac{r_{SP}}{\sqrt{3}}$	0	0	0	0	0	0	0
P	$\frac{r_{SP}}{\sqrt{3}}$	0	0	0	$\frac{2r_{PD}}{\sqrt{15}}$	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	$\frac{r_{PD}}{\sqrt{5}}$	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	$\frac{r_{PD}}{\sqrt{5}}$	0	0
D	0	$\frac{2r_{PD}}{\sqrt{15}}$	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	$\frac{r_{PD}}{\sqrt{5}}$	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	$\frac{r_{PD}}{\sqrt{5}}$	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Nun bestehen die Gleichungen nach (46,4) $\mathfrak{H}^{(1)} = \mathfrak{H}^{(11)} + \mathfrak{H}^{(12)}$,

nach (46,6) $\mathfrak{S}^{(0)}\mathfrak{W}^{(1)} = \mathfrak{H}^{(11)}\mathfrak{S}^{(0)}$,

nach (46,16) $\mathfrak{w} = \mathfrak{W}^{(0)} + \lambda\,\mathfrak{W}^{(1)} + \lambda\,\mathfrak{w}^{(12)} + \lambda^2\,\mathfrak{w}^{(2)}$.

Man erkennt, daß jetzt

$$\mathfrak{H}^{(11)} = 0\,,\quad \mathfrak{W}^{(1)} = 0\,,\quad \mathfrak{S}^{(0)} = \mathfrak{E}\,,\quad \mathfrak{w}^{(12)} = \mathfrak{H}^{(12)} = \mathfrak{z}^{(0)}\,,\quad \mathfrak{w}^{(2)} = 0 \tag{48,7}$$

wird, d. h. in der ersten Näherung hat das elektrische Feld keine Wirkung auf die Terme.

In der zweiten Näherung untersuchen wir zunächst die nichtentarteten S-Terme. Wegen (46,30) wird, wenn sich der Index n auf einen S-Term bezieht $S_{nn}^{(0)} = 1$, $S_{mn}^{(0)} = 0$, also

$$S_{mn}^{(1)} = \frac{Z_{mn}^{(0)}}{W_n^{(0)} - W_m^{(0)}}$$

und nach (46,31)

$$W_n^{(2)} = \sum_r \frac{Z_{nr}^{(0)}\,Z_{rn}^{(0)}}{W_n^{(0)} - W_r^{(0)}}\,.$$

Nun verschwinden die $Z_{rn}^{(0)}$ nur dann nicht, wie sich aus (48,6) ergibt, wenn r zu einem P-Term gehört. Damit folgt

$$W_S^{(2)} = \frac{1}{3}\sum \frac{r_{SP}^2}{W_S^{(0)} - W_P^{(0)}}\,. \tag{48,8}$$

Die Summe ist dabei über alle P-Terme zu erstrecken. Die S-Terme werden also im elektrischen Feld verschoben und die Verschiebung ist

$$\Delta W_S = \lambda^2\,W_S^{(2)} = \frac{e^2\,\mathfrak{E}^2}{3}\sum \frac{r_{SP}^2}{W_S^{(0)} - W_P^{(0)}}\,, \tag{48,9}$$

d. h. sie ist proportional dem Quadrat der Feldstärke und $W_S^{(2)}$.

Die gesamte Ausstrahlung einer PS-Linie ist nun

$$\mathfrak{J} = \frac{16\,\pi^3\,\nu^3\,e^2}{3\,\varepsilon_0\,c^3}\,r_{SP}^2\,. \tag{48,10}$$

Die r_{SP} können also gemessen werden und damit ist die Term-Verschiebung bestimmt.

Die Berechnung des STARCK-Effektes der P- und D-Terme könnte durch Spezialisierung der obigen Formeln geschehen. Einfacher ist es aber, Untermatrizen zu Hilfe zu nehmen.

Z. B. ist die Untermatrix $\mathfrak{z}_{1S,\,2P}^{(0)}$ nach (48,6)

$$\mathfrak{z}_{1S,\,2P}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{r_{1S,\,2P}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{48,11}$$

und

$$\mathfrak{z}^{(0)}_{2P,3D} = \begin{pmatrix} \frac{2\,r_{2P,3D}}{\sqrt{15}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r_{2P,3D}}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_{2P,3D}}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{48,12}$$

In der Diagonale sind die Untermatrizen Nullmatrizen. Damit läßt sich die Matrix $\mathfrak{z}^{(0)}$ (48,6) mit entsprechenden Untermatrizen folgendermaßen schreiben:

	$1S$	$2S$	$2P$	$3S$	$3P$	$3D$	$4S$
$1S$	0	0	$\mathfrak{z}^{(0)}_{1S,2P}$	0	$\mathfrak{z}^{(0)}_{1S,3P}$	0	0
$2S$	0	0	$\mathfrak{z}^{(0)}_{2S,2P}$	0	$\mathfrak{z}^{(0)}_{2S,3P}$	0	0
$2P$	$\mathfrak{z}^{(0)}_{2P,1S}$	$\mathfrak{z}^{(0)}_{2P,2S}$	0	$\mathfrak{z}^{(0)}_{2P,3S}$	0	$\mathfrak{z}^{(0)}_{2P,3D}$	$\mathfrak{z}^{(0)}_{2P,4S}$
$3S$	0	0	$\mathfrak{z}^{(0)}_{3S,2P}$	0	$\mathfrak{z}^{(0)}_{3S,3P}$	0	0
$3P$	$\mathfrak{z}^{(0)}_{3P,1S}$	$\mathfrak{z}^{(0)}_{3P,2S}$	0	$\mathfrak{z}^{(0)}_{3P,3S}$	0	$\mathfrak{z}^{(0)}_{3P,3D}$	$\mathfrak{z}^{(0)}_{3P,4S}$
$3D$	0	0	$\mathfrak{z}^{(0)}_{3D,2P}$	0	$\mathfrak{z}^{(0)}_{3D,3P}$	0	0
$4S$	0	0	$\mathfrak{z}^{(0)}_{4S,2P}$	0	$\mathfrak{z}^{(0)}_{4S,3P}$	0	0
⋮							

(48,13)

Um diese Matrix auf die Diagonalform zu bringen, führt man eine Transformation mit der unitären Matrix aus:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}^{(0)} - e\,|\mathfrak{E}|\,\mathfrak{S}^{(1)} + e^2\,\mathfrak{E}^2\,\mathfrak{S}^{(2)}. \tag{48,14}$$

Es sei $\mathfrak{D}$ die Diagonalmatrix, dann muß gelten:

$$\begin{aligned} &(\mathfrak{S}^{(0)} - e\,|\mathfrak{E}|\,\mathfrak{S}^{(1)} + e^2\mathfrak{E}^2\mathfrak{S}^{(2)})\;(\mathfrak{W}^{(0)} + e^2\mathfrak{E}^2\mathfrak{D}) \\ &= (\mathfrak{W}^{(0)} - e\,|\mathfrak{E}|\,\mathfrak{z}^{(0)})\;(\mathfrak{S}^{(0)} - e\,|\mathfrak{E}|\,\mathfrak{S}^{(1)} + e^2\mathfrak{E}^2\,\mathfrak{S}^{(2)}). \end{aligned} \tag{48,15}$$

Formal läßt sich hierdurch die Entartung beseitigen, da $\mathfrak{D}$ eine Diagonalmatrix ist, deren Untermatrizen selbst nicht Diagonalmatrizen zu sein brauchen.

Die nullte Näherung liefert

$$\mathfrak{S}^{(0)} = \mathfrak{E}. \tag{48,16}$$

Die erste Näherung

$$\mathfrak{S}^{(1)}_{mn} = \frac{\mathfrak{z}^{(0)}_{mn}}{W^{(0)}_n - W^{(0)}_m}, \tag{48,17}$$

die zweite Näherung

$$\mathfrak{S}^{(2)}\,\mathfrak{W}^{(0)} + \mathfrak{D} = \mathfrak{W}^{(0)}\,\mathfrak{S}^{(2)} + \mathfrak{z}^{(0)}\,\mathfrak{S}^{(1)}, \tag{48,18}$$

und daher ergibt sich für die Untermatrizen $\mathfrak{D}_{nn}$

$$\mathfrak{D}_{nn} = \sum_r \mathfrak{z}_{nr}^{(0)} \mathfrak{S}_{rn}^{(0)} = \sum_r \frac{\mathfrak{z}_{nr}^{(0)} \mathfrak{z}_{rn}^{(0)}}{W_n^{(0)} - W_r^{(0)}}. \tag{48,19}$$

Ordnet man nun, um den STARCK-Effekt des P-Terms berechnen zu können, n dem Term $n\,P$ zu, so verschwinden die $\mathfrak{z}_{nr}$ nur dann nicht, wenn r zu einem S-Term oder P-Term gehört. Wegen (48,11) und (48,12) wird dann

$$\mathfrak{z}_{nP,rS}^{(0)} \mathfrak{z}_{rS,nP}^{(0)} = r_{nP,rS}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{48,20}$$

und

$$\mathfrak{z}_{nP,rD}^{(0)} \mathfrak{z}_{rD,nP}^{(0)} = r_{nP,rD}^2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \tag{48,21}$$

Damit ist $\mathfrak{D}_{nn}$ selbst eine Diagonalmatrix geworden mit den Diagonalelementen

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \sum_r \frac{r_{nP,rS}^2}{W_{nP}^{(0)} - W_{rS}^{(0)}} + \frac{4}{15} \sum_r \frac{r_{nP,rD}^2}{W_{nP}^{(0)} - W_{rD}^{(0)}} &= d_{11}, \\ \frac{1}{5} \sum_r \frac{r_{nP,rD}^2}{W_{nP}^{(0)} - W_{rD}^{(0)}} &= d_{22}, \\ \frac{1}{5} \sum_r \frac{r_{nP,rD}^2}{W_{nP}^{(0)} - W_{rD}^{(0)}} &= d_{33}. \end{aligned} \tag{48,22}$$

Es spaltet also ein P-Term im elektrischen Feld in zwei Terme auf, einen einfachen und einen doppelten. Die Verschiebung des einfachen Terms bei Anwesenheit eines Feldes ist daher

$$\Delta W_P = e^2 \mathfrak{E}^2 d_{11} \tag{48,23}$$

und die des doppelten

$$\Delta W_P = e^2 \mathfrak{E}^2 d_{22}. \tag{48,24}$$

Die Berechnung des STARCK-Effektes der D-Terme geschieht auf die gleiche Weise und liefert das Ergebnis:

Im elektrischen Feld erhält man aus einem D-Term einen einfachen, der um

$$\Delta W_D = e^2 \mathfrak{E}^2 \left\{ \frac{9}{35} \sum_r \frac{r_{nD,rF}^2}{W_{nD}^{(0)} - W_{rF}^{(0)}} + \frac{4}{15} \sum_r \frac{r_{nD,rP}^2}{W_{nD}^{(0)} - W_{rP}^{(0)}} \right\} \tag{48,25}$$

und je einen doppelten, der um

$$\Delta W_D = e^2 \mathfrak{E}^2 \left\{ \frac{8}{35} \sum_r \frac{r_{nD,rF}^2}{W_{nD}^{(0)} - W_{rF}^{(0)}} + \frac{1}{5} \sum_r \frac{r_{nD,rP}^2}{W_{nD}^{(0)} - W_{rP}^{(0)}} \right\} \tag{48,26}$$

und $$\Delta W_D = e^2 \mathfrak{E}^2 \sum_r \frac{r^2_{nD,rF}}{W^{(0)}_{nD} - W^{(0)}_{rF}} \tag{48,27}$$

verschoben ist.

Schematisch ergibt sich also folgendes Bild für den quadratischen STARCK-Effekt

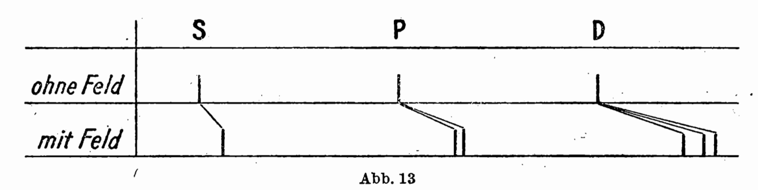


Abb. 13

Für die Koordinatenmatrix ergibt sich beim quadratischen Effekt in erster Näherung

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{S}^\dagger \mathfrak{r}^{(0)} \mathfrak{S} = (\mathfrak{S}^{(0)\dagger} - e\,|\,\mathfrak{E}\,|\,\mathfrak{S}^{(1)\dagger})\, \mathfrak{r}^{(0)}\, (\mathfrak{S}^{(0)} - e\,|\,\mathfrak{E}\,|\,\mathfrak{S}^{(1)})\,. \tag{48,28}$$

Bei Vernachlässigung quadratischer Glieder folgt dann

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}^{(0)} - e\,|\,\mathfrak{E}\,|\, (\mathfrak{S}^{(1)\dagger} \mathfrak{r}^{(0)} + \mathfrak{r}^{(0)} \mathfrak{S}^{(1)})\,; \tag{48,29}$$

hiervon ist die mn-te Untermatrix

$$\mathfrak{r}_{mn} = \mathfrak{r}^{(0)}_{mn} - e\,|\,\mathfrak{E}\,|\, \sum_s (\mathfrak{S}^{(1)\dagger}_{ms} \mathfrak{r}^{(0)}_{sn} + \mathfrak{r}^{(0)}_{ms} \mathfrak{S}^{(1)}_{sn})\,. \tag{48,30}$$

Entsprechend (45,14) ist nun $\mathfrak{S}^{(1)\dagger}_{ms} = -\mathfrak{S}^{(0)}_{ms}$ und daher

$$\mathfrak{r}_{mn} = \mathfrak{r}^{(0)}_{mn} - e\,|\,\mathfrak{E}\,|\, \sum_s \left(- \frac{\mathfrak{z}^{(0)}_{ms}\, \mathfrak{r}^{(0)}_{sn}}{W^{(0)}_s - W^{(0)}_m} + \frac{\mathfrak{r}^{(0)}_{ms}\, \mathfrak{z}^{(0)}_{sn}}{W^{(0)}_n - W^{(0)}_s} \right) \tag{48,31}$$

und

$$\mathfrak{r}_{nn} = \mathfrak{r}^{(0)}_{nn} - e\,|\,\mathfrak{E}\,|\, \sum_s \left(- \frac{\mathfrak{z}^{(0)}_{ns}\, \mathfrak{r}^{(0)}_{sn}}{W^{(0)}_s - W^{(0)}_n} + \frac{\mathfrak{r}^{(0)}_{ns}\, \mathfrak{z}^{(0)}_{sn}}{W^{(0)}_n - W^{(0)}_s} \right). \tag{48,32}$$

Nun folgt aber aus (48,5)

$$\mathfrak{r}^{(0)}_{nn} = 0\,. \tag{48,33}$$

Damit wird aus (48,32)

$$\mathfrak{r}_{nn} = - e\,|\,\mathfrak{E}\,|\, \sum_s \frac{\mathfrak{z}^{(0)}_{ns}\, \mathfrak{r}^{(0)}_{sn} + \mathfrak{r}^{(0)}_{ns}\, \mathfrak{z}^{(0)}_{sn}}{W^{(0)}_n - W^{(0)}_s}\,. \tag{48,34}$$

Hieraus ergibt sich speziell für die $\mathfrak{z}$-Komponente von $\mathfrak{r}$

$$\mathfrak{z}_{nn} = -2\, e\,|\,\mathfrak{E}\,|\, \sum_s \frac{\mathfrak{z}^{(0)}_{ns}\, \mathfrak{z}^{(0)}_{sn}}{W^{(0)}_n - W^{(0)}_s}\,, \tag{48,35}$$

d. h. das Feld ruft im Atom ein Dipolmoment in der Feldrichtung hervor von der Größe

$$\mathfrak{P}_{nn} = - e\, \mathfrak{z}_{nn} = 2\, e^2\, \mathfrak{E}\, \mathfrak{D}_{nn}\,. \tag{48,36}$$

b) Der lineare STARCK-Effekt

Als einfachster Fall sei der Wasserstoff betrachtet, bei dem die S-, P-, D-, ... Terme gleicher Hauptquantenzahl zusammenfallen. Diese Entartung muß nun berücksichtigt werden. Aus (48,13) ersieht man, daß nicht mehr $\mathfrak{H}^{(11)} = 0$ ist. Vielmehr erhält man aus (48,6) gerade die zur Hauptquantenzahl 3 gehörige Stufe von $\mathfrak{H}^{(11)}$, wenn statt S und D überall $3S$, $3P$, $3D$ gesetzt wird.

Es wird nun $\mathfrak{H}^{(11)}$ auf Hauptachsen transformiert, wobei die Transformation für jede der Stufen einer Hauptquantenzahl einzeln ausgeführt werden kann. Für die n-te Stufe ergibt sich

$$\mathfrak{S}_n^{(0)} \mathfrak{W}_n^{(1)} = \mathfrak{H}_n^{(11)} \mathfrak{S}_n^{(0)}. \tag{48,37}$$

Speziell ist für $n = 1$:

$$\mathfrak{H}_1{}^{(11)} = 0 = \mathfrak{W}_1{}^{(0)}, \tag{48,38}$$

d. h. der Grundterm zeigt den quadratischen Effekt.

Für $n = 2$ ergibt sich

$$\begin{vmatrix} -W_2^{(1)} & \frac{r_{2S,2P}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ \frac{r_{2S,2P}}{\sqrt{3}} & -W_2^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -W_2^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -W_2^{(1)} \end{vmatrix} = 0. \tag{48,39}$$

Die Wurzeln der Säkulargleichung sind

$$W_2{}^{(1)} = 0,\ 0,\ \pm \frac{r_{2S,2P}}{\sqrt{3}}, \tag{48,40}$$

d. h. im elektrischen Feld spalten die zweiquantigen Terme in einen unverschobenen Doppelterm und in zwei zum unverschobenen symmetrisch liegende einfache Terme auf.

Die Termverschiebung beträgt also

$$\Delta W = \pm \frac{e\,|\mathfrak{E}|\,r_{2S,2P}}{\sqrt{3}}. \tag{48,41}$$

Die Matrix

$$\mathfrak{H}_2^{(11)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{r_{2S,2P}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ \frac{r_{2S,2P}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{48,42}$$

wird durch die Matrix

$$\mathfrak{S}_2^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (48,43)$$

auf Hauptachsen transformiert. Die Koordinatenmatrix

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{S}^{(0)\dagger}\,\mathfrak{r}^{(0)}\,\mathfrak{S}^{(0)} \quad (48,44)$$

ergibt

$$\mathfrak{r}_2 = \begin{pmatrix} -\mathfrak{k}\sqrt{2} & 0 & \mathfrak{j} & \mathfrak{i} \\ 0 & \mathfrak{k}\sqrt{2} & \mathfrak{j} & \mathfrak{i} \\ \mathfrak{j} & \mathfrak{j} & 0 & 0 \\ \mathfrak{i} & \mathfrak{i} & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{r_{2S,\,2P}}{\sqrt{6}}. \quad (48,45)$$

Speziell wird für die $\mathfrak{z}$-Komponente

$$\mathfrak{z}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{r_{2S,\,2P}}{\sqrt{3}}, \quad (48,46)$$

d. h. es entstehen zwei einfache Terme mit dem Dipolmoment

$$\mathfrak{P}_2 = \pm e \frac{r_{2S,\,2P}}{\sqrt{3}} \quad (48,47)$$

und ein Doppelterm ohne Dipolmoment. — Mit $n = 3$ ergibt sich

$$\begin{vmatrix} -W_3^{(1)} & \frac{r_{3S,3P}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{r_{3S,3P}}{\sqrt{3}} & -W_3^{(1)} & 0 & 0 & \frac{2r_{3P,3D}}{\sqrt{15}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -W_3^{(1)} & 0 & 0 & \frac{r_{3P,3D}}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -W_3^{(1)} & 0 & 0 & \frac{r_{3D,3P}}{\sqrt{5}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2r_{3P,3D}}{\sqrt{15}} & 0 & 0 & -W_3^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r_{3P,3D}}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & -W_3^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r_{3P,3D}}{\sqrt{5}} & 0 & 0 & -W_3^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -W_3^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -W_3^{(1)} \end{vmatrix} = 0. \quad (48,48)$$

Die Säkulargleichung liefert die Wurzeln

$$W_3^{(1)} = 0, 0, 0, \pm \frac{r_{3P,3D}}{\sqrt{5}}, \quad \pm \frac{r_{3P,3D}}{\sqrt{5}}, \quad \pm \sqrt{\tfrac{4}{15} r_{3P,3D}^2 + \tfrac{1}{3} r_{3S,3P}^2}, \qquad (48{,}49)$$

d.h. im elektrischen Feld findet eine Aufspaltung in einen unverschobenen dreifachen Term, je zwei zu ihm symmetrisch liegende Doppelterme und zwei einfache Terme statt, und sie ist proportional der Feldstärke.

Das Aufspaltungsbild sieht also folgendermaßen aus:

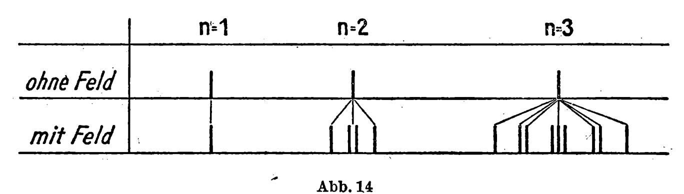


Abb. 14

c) Der Übergang vom quadratischen in den linearen STARCK-Effekt

Es werde ein Atom betrachtet, bei dem S-, P-, D-, ... -Terme gleicher Hauptquantenzahl voneinander verschieden sind; die Aufspaltung sei klein, so daß sie als Störung (als Abweichung des Atomrumpffeldes vom COULOMBschen Gesetz) betrachtet werden kann, und werde gleichzeitig als Störung durch das elektrische Feld betrachtet. Ist die Matrix der ungestörten Terme

$$\mathfrak{W}^{(0)} = \mathfrak{W}^{(00)} + \mathfrak{w}, \qquad (48{,}50)$$

wobei die Elemente von $\mathfrak{W}^{(00)}$ dieselben für S-, P-, D-, ...-Terme sind und so in der Diagonale gerade die Unterschiede der Terme enthält, so werde w mit $-e\,|\mathfrak{E}|\,\mathfrak{H}^{(1)}$ zur ersten Näherung genommen. Es ergibt sich dann für $n = 2$ statt (48,39)

$$\begin{vmatrix} \frac{-w_{2S}}{e\,|\mathfrak{E}|} - W_2^{(1)} & \frac{r_{2S,2P}}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ \frac{r_{2S,2P}}{\sqrt{3}} & -W_2^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -W_2^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -W_2^{(1)} \end{vmatrix} = 0. \qquad (48{,}51)$$

Die Wurzeln sind

$$W_2^{(1)} = 0, 0, \frac{-w_{2S} \pm \sqrt{w_{2S}^2 + \frac{4}{3} e^2 \mathfrak{E}^2 r_{2S,2P}^2}}{2e\,|\mathfrak{E}|}. \qquad (48{,}52)$$

Ist $w_{2S}^2 \gg \frac{4}{3} e^2 \mathfrak{E}^2 r_{2S,2P}^2$, so geht (48,52) näherungsweise in den quadratischen STARCK-Effekt über. Ist aber $w_{2S}^2 \ll \frac{4}{3} e^2 \mathfrak{E}^2 r_{2S,2P}^2$, so erhält man den linearen

STARCK-Effekt. Wird aber die durch das Feld bedingte Termverschiebung so groß, daß die Größenordnung der schon vorher bestandenen Aufspaltung zwischen S-, P-, D-, ... Termen erreicht, so findet ein allmählicher Übergang in den linearen STARCK-Effekt statt. Sind die Verschiebungen durch das Feld groß gegenüber ursprünglichen Termdifferenzen, so ist der Übergang beendet. Höhere Terme zeigen daher den linearen STARCK-Effekt schon bei mäßigen Feldern.

Voraussetzung für die obigen Betrachtungen war, daß Singuletterme oder Terme mit geringer Multiplettaufspaltung vorlagen. Größere Multiplettaufspaltung bedingt weitere Komplikationen, die hier nicht betrachtet werden sollen.

49. Der ZEEMAN-Effekt

Die Linien der Serienspektren sind auch magnetisch beeinflußbar (ZEEMAN 1896). Statt einer Singulett-Linie erscheinen bei longitudinaler Beobachtung, d. h. wenn der Strahl in Richtung der magnetischen Kraftlinien verläuft, zwei Linien (ZEEMAN-Dublett, Längseffekt), bei transversaler Beobachtung, d. h. wenn der Strahl senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien geht, drei Linien (ZEEMAN-Triplett, Quereffekt); von diesen drei Linien liegt eine am Ort der ursprünglich unzerlegten Linie, die beiden anderen sind um das gleiche Stück nach größeren und kleineren Frequenzen verschoben und befinden sich am gleichen Ort des Spektrums, wie die beiden Linien des Dubletts im Längseffekt. Die Verschiebung beträgt

$$\Delta\nu = \frac{e}{\mu}\frac{H}{4\pi c} \quad [\mathrm{sec}^{-1}], \quad H\,[\mathrm{GAUSS}], \quad \mu = \mathrm{Masse}. \tag{49,1}$$

Sämtliche Linien sind polarisiert. Im Längseffekt tritt Zirkularpolarisation auf, und zwar in den beiden Linien des Dubletts solche von entgegengesetzem Sinn. Allgemein erweist sich in der kurzwelligeren Komponente der Sinn der Zirkularpolarisation gleichgerichtet mit dem positiven Strom, der in der Wicklung des Elektromagneten das Magnetfeld erzeugt. Im Triplett liegt bei der unverschobenen Linie die elektrische Schwingungsrichtung parallel (π) zu den Kraftlinien, dagegen bei den beiden verschobenen Linien senkrecht (σ) (normaler ZEEMAN-Effekt).

Ein anderes Verhalten zeigen Multiplett-Linien und auch Wasserstoff (anormaler ZEEMAN-Effekt), verursacht durch den Spin der Elektronen. Bei schwachen Feldern kann sich der ZEEMAN-Typus jeder Linie eines Multipletts ungestört von dem ZEEMAN-Typus der Nachbarlinien ausbilden. Bei wachsenden Feldern würden sich die Zerlegungsbilder durchdringen. Noch ehe es dazu kommt, findet eine gegenseitige Beeinflußung der ZEEMAN-Typen statt. Bei starken Feldern (magnetische Aufspaltung $\Delta\nu$ groß gegen die ursprünglichen Schwingungsdifferenzen im Multiplett) verhält sich schließlich angenähert jedes Liniengebilde wie eine Einfachlinie und zeigt den normalen ZEEMAN-Effekt (PASCHEN-BACK-Effekt).

Im folgenden soll die elementare Theorie des ZEEMAN-Effektes und die damit zusammenhängenden magnetischen Erscheinungen als Beispiel der Störungsrechnung behandelt werden.

Das Magnetfeld $\mathfrak{H}$ wurde aus dem Vektorpotential $\mathfrak{A}$ abgeleitet nach der Formel

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A}, \tag{49,2}$$

wobei $\mathfrak{A}$ die Bedingung

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = 0 \tag{49,3}$$

erfüllt.

Es werde nun ein allgemeines Atommodell angenommen, nämlich mit einem ruhenden Kern und beliebig vielen umlaufenden Elektronen. Die Energie des ungestörten Systems (ohne Magnetfeld) sei als Funktion gewisser Wirkungsvariablen $J_1, J_2, \ldots$ gegeben durch

$$W_0 (J_1, J_2, \ldots).$$

Ist nun ein homogenes Magnetfeld gegeben, so ist die potentielle Energie des Systems invariant gegen eine Drehung um die Richtung des Feldes. Das Azimut φ eines beliebigen Punktes des Systems ist zyklische Variable und der zugehörige konjugierte Impuls ist der Drehimpuls des Systems um die Feldrichtung.

Im Magnetfeld $\mathfrak{H}$ wirkt nun auf ein Elektron die LORENTZ-Kraft:

$$\mathfrak{K}^* = -\frac{e}{c} (\mathfrak{v} \times \mathfrak{H}). \tag{49,4}$$

Da nun die Kräfte, die auf die Punkte des Systems wirken, von den Geschwindigkeiten abhängen (der Bestandteil sei $\mathfrak{K}^*$), so bestimmt man eine Funktion M, so daß

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial M}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial M}{\partial x} = \mathfrak{K}_x^* \tag{49,5}$$

wird und setzt im HAMILTONschen Variationsprinzip

$$\int_{t_1}^{t_2} L \cdot dt = \text{Extremum} \tag{49,6}$$

$$L = T^* - U - M \tag{49,7}$$

wobei

$$T^* = \mu_0 c^2 \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right]. \tag{49,8}$$

Dann lauten nämlich die LAGRANGEschen Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial M}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial M}{\partial x} = 0, \tag{49,9}$$

d. h. das Variationsprinzip ist mit den NEWTONschen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} (\mu \dot{x}) - \mathfrak{K}_x - \mathfrak{K}_x^* = 0 \tag{49,10}$$

gleichbedeutend. Die geforderte Funktion hat die Eigenschaft

$$M = \frac{e}{c} \mathfrak{A} \mathfrak{v} = \frac{e}{c} (\mathfrak{A}_x \dot{x} + \mathfrak{A}_y \dot{y} + \mathfrak{A}_z \dot{z}); \tag{49,11}$$

denn es ist

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial M}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{d}{dt}\left(\frac{e}{c}\mathfrak{A}_x\right) - \frac{e}{c}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial z}\dot{z}\right)$$
$$= -\frac{e}{c}\left[\dot{y}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial x}\right) - \dot{z}\left(\frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{A}_z}{\partial x}\right)\right]$$
$$= -\frac{e}{c}(\mathfrak{v}\times\mathfrak{H})_x = \mathfrak{K}_x^*.$$

Die LAGRANGEsche Funktion ist

$$L = T - U - \frac{e}{c}\sum(\mathfrak{A}_x\dot{x} + \mathfrak{A}_y\dot{y} + \mathfrak{A}_z\dot{z}), \tag{49,12}$$

wobei die Summe über alle Elektronen zu erstrecken ist. Hieraus lassen sich die Impulse berechnen. Für ein Elektron werden sie

$$\left.\begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \mu\dot{x} - \frac{e}{c}\mathfrak{A}_x \\ p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \mu\dot{y} - \frac{e}{c}\mathfrak{A}_y \\ p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \mu\dot{z} - \frac{e}{c}\mathfrak{A}_z \end{aligned}\right\}. \tag{49,13}$$

Die HAMILTONsche Funktion wird dann

$$H = \sum(\dot{x}p_x + \dot{y}p_y + \dot{z}p_z) - L$$
$$= \sum\frac{\mu}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U = T + U. \tag{49,14}$$

In der Energie tritt kein dem magnetischen Feld entsprechendes Zusatzglied auf, da die magnetischen Kräfte keine Arbeit leisten; die Kraft $-\frac{e}{c}[\mathfrak{v}\times\mathfrak{H}]$ steht ja immer auf $\mathfrak{v}$ senkrecht. Werden die Geschwindigkeitskomponenten in H durch die Impulse ausgedrückt, so erhält man

$$H = \sum\left[\frac{1}{2\mu}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{e}{c\mu}(\mathfrak{A}_x p_x + \mathfrak{A}_y p_y + \mathfrak{A}_z p_z) + \frac{e^2}{2\mu c^2}(\mathfrak{A}_x^2 + \mathfrak{A}_y^2 + \mathfrak{A}_z^2)\right] + U$$
$$= H_0 + \sum_k\left(\frac{e}{c\mu}p_k\mathfrak{A}_k + \frac{e^2}{2\mu c^2}\mathfrak{A}_k^2\right), \tag{49,15}$$

wobei

$$H_0 = \sum_k \frac{1}{2\mu}p_k^2 + U$$

die Energie des ungestörten Systems ist und $\mathfrak{A}_k$ den Wert des Vektors $\mathfrak{A}$ an der Stelle des k-ten Teilchens bedeutet.

Übernimmt man diesen Ausdruck in die Quantenmechanik, so müssen die Koordinaten x_k, y_k, z_k (Vektor $\mathfrak{r}_k$) und Impulse p_{kx}, p_{ky}, p_{kz} (Vektor $\mathfrak{p}_k$) den kanonischen Vertauschungsregeln genügen. Das skalare Produkt $\mathfrak{p}_k\mathfrak{A}_k$ ist unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren; denn es ist

$$\mathfrak{p}_{kx}\mathfrak{A}_{kx} - \mathfrak{A}_{kx}\mathfrak{p}_{kx} = \varkappa\frac{\partial\mathfrak{A}_{kx}}{\partial x},$$

also wegen (49,3)

$$\mathfrak{p}_k \mathfrak{A}_k - \mathfrak{A}_k \mathfrak{p}_k = \varkappa \, div_k \mathfrak{A}_k = 0 . \tag{49,16}$$

Die kanonischen Bewegungsgleichungen liefern

$$\dot{x}_k = \mathfrak{v}_{kx} = \frac{\partial H}{\partial p_{kx}} = \frac{1}{\mu} p_{kx} + \frac{e}{c\mu} \mathfrak{A}_{kx} ,$$

d. h. entsprechend (49,13)

$$\mu \mathfrak{v}_k = \mathfrak{p}_k - \frac{e}{c} \mathfrak{A}_k ,$$

ferner

$$\dot{p}_{kx} = -\frac{\partial U}{\partial x_k} - \frac{e}{c}\left(\mathfrak{v}_{kx} \frac{\partial \mathfrak{A}_{kx}}{\partial x_k} + \mathfrak{v}_{ky} \frac{\partial \mathfrak{A}_{ky}}{\partial x_k} + \mathfrak{v}_{kz} \frac{\partial \mathfrak{A}_{kz}}{\partial x_k}\right),$$

so folgt

$$\mu \dot{\mathfrak{v}}_k = -\mathrm{grad}_k\, U + \frac{e}{c} (\mathfrak{v}_k \times \mathfrak{H}_k) . \tag{49,17}$$

Das magnetische Moment ist nun definiert durch

$$\mathfrak{m} = -\frac{e}{2c} \sum_k (\mathfrak{r}_k \times \mathfrak{v}_k) . \tag{49,18}$$

Wird das magnetische Impulsmoment

$$\mathfrak{M} = \sum_k (\mathfrak{r}_k \times \mathfrak{p}_k) \tag{49,19}$$

eingeführt, so folgt

$$\mathfrak{m} = -\frac{e}{2c} \mathfrak{M} + \frac{e^2}{2\mu c^2} \sum_k (\mathfrak{r}_k \times \mathfrak{A}_k) . \tag{49,20}$$

Es werde nun speziell ein homogenes Magnetfeld untersucht, das parallel zur z-Achse laufe und die Stärke $|\mathfrak{H}|$ habe.

Dann ist (49,2) erfüllt für

$$\mathfrak{A}_{kx} = -\tfrac{1}{2} y_k |\mathfrak{H}| , \quad \mathfrak{A}_{ky} = \tfrac{1}{2} x_k |\mathfrak{H}| , \quad \mathfrak{A}_{kz} = 0 . \tag{49,21}$$

Wird weiterhin das BOHRsche Magneton eingeführt:

$$M_0 = \frac{e}{2\mu c} \frac{h}{2\pi} = 9{,}21 \times 10^{-21} \quad \text{GAUSS.}\ m , \tag{49,22}$$

so wird

$$H = H_0 + M_0 \frac{2\pi}{h} \mathfrak{M}_z |\mathfrak{H}| + \frac{1}{8\mu c^2} \Theta \mathfrak{H}^2 , \tag{49,23}$$

wobei

$$\mathfrak{M}_z = \sum_k (x_k p_{ky} - y_k p_{kx}) , \tag{49,24}$$

die dem Felde parallele Komponente des Drehimpulses, und

$$\Theta = \sum_k e^2 (x_k^2 + y_k^2) \tag{49,25}$$

das elektrische Trägheitsmoment um die Feldrichtung ist. Daher wird das magnetische Moment nach (49,20) und (49,21)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{m}_x &= -\frac{e}{2\mu c}\mathfrak{M}_x - \frac{e^2}{4\mu c^2}\sum_k x_k z_k\,|\mathfrak{H}| \\ \mathfrak{m}_y &= -\frac{e}{2\mu c}\mathfrak{M}_y - \frac{e^2}{4\mu c^2}\sum_k y_k z_k\,|\mathfrak{H}| \\ \mathfrak{m}_z &= -\frac{e}{2\mu c}\mathfrak{M}_z - \frac{1}{4\mu c^2}\Theta\,|\mathfrak{H}| \end{aligned}\right\}. \tag{49,26}$$

Man hat bei der Anwendung der Störungsrechnung auf die Energiefunktion (49,23) zu beachten, daß $\mathfrak{M}_z$ ein Integral der ungestörten Bewegung ist. Man wird also

$$H^{(0)} = H_0 + M_0 \frac{2\pi}{h}\mathfrak{M}_z\,|\mathfrak{H}| \tag{49,27}$$

als Energie der ungestörten Bewegung ansehen und setzen

$$\begin{aligned} H^{(1)} &= 0 \\ H^{(2)} &= \frac{\Theta}{8\mu c^2}\mathfrak{H}^2. \end{aligned} \tag{49,28}$$

Bringt man $H^{(0)}$ auf die Diagonalform, so erhält man

$$H^{(0)} = W^{(0)}(n,j,m) = W_0(n,j) + M_0 m\,|\mathfrak{H}|, \tag{49,29}$$

wo j die innere Quantenzahl, m die magnetische Quantenzahl und n eine Zusammenfassung aller übrigen Quantenzahlen ist.

Bei Annahme eines punktförmigen Elektrons, also ganzzahligem m, kommt also bei schwachen Feldern stets der normale ZEEMAN-Effekt heraus, im Widerspruch zur Erfahrung.

Wird vorausgesetzt, daß keine Entartung des Systems mehr im Magnetfeld vorliegt, so wird nach der Störungsrechnung

$$W^{(2)}(n,j,m) = H^{(2)}(m,m) = \frac{\Theta(n,j,m)}{8\mu c^2}\mathfrak{H}^2, \tag{49,30}$$

wobei $\Theta(n,j,m)$ das Diagonalelement der Matrix (49,25) ist. In zweiter Näherung erhöht also das Magnetfeld die Energie aller Terme. Das bedeutet, daß Arbeit aufgewendet werden muß, wenn ein Atom in ein Magnetfeld gebracht wird. Dieser Effekt zweiter Näherung ist für den Diamagnetismus verantwortlich zu machen. Auch die S-Terme, die in erster Näherung auf ein Magnetfeld nicht reagieren, zeigen Diamagnetismus.

Es sollen nun die zeitlichen Mittelwerte (Diagonalelemente) der Komponenten des magnetischen Momentes (49,26) berechnet werden. Es sind die Diagonalelemente von $\mathfrak{M}_x$ und $\mathfrak{M}_y$ gleich Null. Dasselbe gilt auch von den Diagonalelementen der Größen $\sum_k x_k z_k$, $\sum_k y_k z_k$, da auch das gestörte System um die z-Achse frei beweglich ist. Also verschwinden die Zeitmittelwerte von $\mathfrak{m}_x$ und $\mathfrak{m}_y$, wie es auch der Symmetrie des Vorganges entspricht. Das Diagonalelement von $\mathfrak{m}_z$ sei $M(n,j,m)$. Wegen (49,22) wird es

$$M(n,j,m) = -M_0 m - \frac{\Theta(n,j,m)}{4\mu c^2}\,|\mathfrak{H}|. \tag{49,31}$$

Und wegen (49,29) und (49,30) wird

$$M(n,j,m) = -\frac{\partial W(n,j,m)}{\partial |\mathfrak{H}|}. \tag{49,32}$$

Das mittlere magnetische Moment je Atom ist, wenn im Gas die BOLTZMANN-Statistik gilt,

$$\overline{M} = \frac{\Sigma M(n,j,m)\, e^{-\frac{W(n,j,m)}{kT}}}{\Sigma e^{-\frac{W(n,j,m)}{kT}}}. \tag{49,33}$$

Gemäß (49,31) kann man $\overline{M}$ in zwei Anteile zerlegen:

$$\overline{M} = \overline{M}_p + \overline{M}_d, \tag{49,34}$$

wobei

$$\overline{M}_p = M_0 \frac{\Sigma\, m\, e^{-\frac{W_0 - M_0 |\mathfrak{H}|\, m}{kT}}}{\Sigma e^{-\frac{W_0 - M_0 |\mathfrak{H}|\, m}{kT}}} \tag{49,35}$$

und

$$\overline{M}_d = X_d\, |\mathfrak{H}|, \quad X_d = -\frac{1}{4\mu c^2} \frac{\Sigma\, \Theta\, e^{-\frac{W_0}{kT}}}{\Sigma e^{-\frac{W_0}{kT}}} \tag{49,36}$$

ist. $\overline{M}_p$ ist das paramagnetische, $\overline{M}_d$ das diamagnetische Moment. Im folgenden seien noch einige Bemerkungen zum Para- und Dia-Magnetismus gemacht.

a) Paramagnetismus

Setzt man

$$S(j) = \sum_{m=-j}^{j} e^{\beta m} = \frac{e^{\beta j} - e^{-\beta(j+1)}}{1 - e^{-\beta}}, \qquad \beta = \frac{M_0 |\mathfrak{H}|}{kT} \tag{49,37}$$

und

$$M(j) = M_0 \frac{\sum\limits_{m=-j}^{j} m e^{\beta m}}{\sum\limits_{m=-j}^{j} e^{\beta m}} = M_0 \frac{d \ln S(j)}{d\beta}$$
$$= M_0 \left\{ \frac{j e^{\beta j} + (j+1) e^{-\beta(j+1)}}{e^{\beta j} - e^{-\beta(j+1)}} - \frac{1}{e^{\beta} - 1} \right\}, \tag{49,38}$$

so folgt

$$\overline{M}_p = \frac{\sum\limits_{j,n} M(j)\, S(j)\, e^{-\frac{W_0(n,j)}{kT}}}{\sum\limits_{j,n} S(j)\, e^{-\frac{W_0(n,j)}{kT}}}.$$

Besitzt j den niedrigsten Wert j_0, so wird näherungsweise

$$\overline{M}_p = M(j_0). \tag{49,39}$$

Ist j groß, so daß $j+1$ durch j ersetzt werden kann, so gilt näherungsweise

$$M(j) \approx M_0 \left(j \,\mathfrak{Ctg}\, \beta j - \frac{1}{e^{\beta} - 1} \right); \tag{49,40}$$

ist zugleich β klein, so erhält man

$$M(j) \approx M_0 j \left(\mathfrak{Ctg}\, \beta j - \frac{1}{\beta j} \right), \tag{49,41}$$

die bekannte Formel von Langevin.

$M(j)$ strebt mit wachsendem $\mathfrak{H}$, d. h. $\beta \to \infty$ dem Wert zu

$$M(j)_\infty \to M_0 j\,. \tag{49,42}$$

Im Sättigungszustand verhält sich also das magnetische Moment so, als ob j-Bohrsche Magnetonen M_0 pro Atom gleichgerichtet wären.

Für kleine Felstärken, $\beta \to 0$ hat man angenähert

$$M(j) \approx X_p(j)\,|\mathfrak{H}| \tag{49,43}$$

mit der paramagnetischen Anfangssuszeptibilität

$$X_p(j) = \frac{M_0^2}{kT} \frac{j(j+1)}{3} = \frac{M^2(j)_\infty}{3kT} \cdot \frac{j+1}{j}\,. \tag{49,44}$$

Dies ist das Curiesche Gesetz:

$$X_p = \frac{C}{kT}, \tag{49,45}$$

wobei die Curiesche Konstante den Wert

$$C = \frac{M_0^2 j(j+1)}{3} = \frac{M^2(j)_\infty}{3} \frac{j+1}{j} \tag{49,46}$$

hat.

Für große j geht dieser Ausdruck in den der klassischen Theorie über.

b) Diamagnetismus

Fehlt bei einem Körper der Paramagnetismus, d. h. ist der Wert der inneren Quantenzahl im Normalzustand $j_0 = 0$, so tritt der Diamagnetismus rein zutage.

Nach (49,36) ist die diamagnetische Suszeptibilität

$$X_d = \frac{\sum\limits_{n,j} X_d(n,j)\, e^{-\frac{W_0(n,j)}{kT}}}{\sum\limits_{n,j} (2j+1)\, e^{-\frac{W_0(n,j)}{kT}}}, \tag{49,47}$$

wobei

$$X_d(n,j) = -\frac{1}{4\mu c^2} \sum_{m=-j}^{j} \Theta(n,j,m)\,. \tag{49,48}$$

Im allgemeinen ist X_d sehr wenig von der Temperatur abhängig, da der Energiewert im Normalzustand $W_0(0,0)$ tiefer liegt als für einen anderen Zustand.

$X_d(0,0)$ stellt dann direkt die diamagnetische Suszeptibilität dar. Bei Ausnahmen wird man $n = 0$ setzen, aber verschiedene j-Werte berücksichtigen. Dann hat man

$$X_d = \frac{\sum_j X_d(j)\, e^{-\frac{W_0(j)}{kT}}}{\sum_j (2j+1)\, e^{-\frac{W_0(j)}{kT}}} \tag{49,49}$$

mit

$$X_d(j) = -\frac{1}{4\mu c^2} \sum_{m=-j}^{j} \Theta(0,j,m)\,. \tag{49,50}$$

Nun ist $\Theta(0,j,m)$ das Diagonalglied der Matrix Θ, so ist

$$\sum_{m=-j}^{j} \Theta(0,j,m) = S_p\, \Theta^{(j,j)}\,. \tag{49,51}$$

Nach (49,25) ist aber

$$\Theta_{xx} = \sum_k e^2 (y_k^2 + z_k^2)\,, \ldots, \quad \Theta_{yz} = \sum_k e^2\, y_k z_k\,, \ldots,$$

andererseits ist

$$\begin{aligned} S_p\, \Theta^{(j,j)} &= \tfrac{1}{3} S_p \left(\Theta_{xx}^{(j,j)} + \Theta_{yy}^{(j,j)} + \Theta_{zz}^{(j,j)}\right) \\ &= \tfrac{2}{3} S_p \sum_k e^2 (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2) \\ &= \tfrac{2}{3} e^2 S_p \left(\sum_k \mathfrak{r}_k^2\right)^{(j,j)}. \end{aligned} \tag{49,52}$$

Daher wird (49,50)

$$X_d^{(j)} = -\frac{e^2}{6\mu c^2} S_p \left(\sum_k \mathfrak{r}_k^2\right)^{(j,j)}. \tag{49,53}$$

Wenn man annimmt, daß im Grundzustand $j = 0$ die Größe $\left(\sum_k \mathfrak{r}_k^2\right)^{(j,j)}$ von der Ordnung des Quadrats der atomaren Dimension 10^{-8} cm ist, so ergibt sich für die Suszeptibilität je Mol die Größenordnung 10^{-6}, die mit experimentellen Werten übereinstimmt.

50. Dispersion des Lichtes

Eine monochromatische Lichtwelle treffe auf ein System; die Rückwirkung des getroffenen Systems auf das Licht (erzwungene Ausstrahlung) werde vernachlässigt. Das elektrische Feld der Welle sei mit reellen Amplituden und Phasen durch

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_x &= a_x \cos(2\pi\nu t + \varphi_x) \\ \mathfrak{E}_y &= a_y \cos(2\pi\nu t + \varphi_y) \\ \mathfrak{E}_z &= a_z \cos(2\pi\nu t + \varphi_z) \end{aligned}\right\} \tag{50,1}$$

dargestellt; bei Benutzung komplexer Amplituden

$$\mathfrak{E}_x^{(0)} = a_x e^{i\varphi_x}\,, \quad \mathfrak{E}_y^{(0)} = a_y e^{i\varphi_y}\,, \quad \mathfrak{E}_z^{(0)} = a_z e^{i\varphi_z} \tag{50,2}$$

kann man auch schreiben

$$\mathfrak{E} = \tfrac{1}{2}\left(\mathfrak{E}^{(0)} e^{2\pi i \nu t} + \mathfrak{E}^{(0)*} e^{-2\pi i \nu t}\right). \tag{50,3}$$

Das elektrische Moment des Systems sei durch die hermitische Matrix $\mathfrak{P}$ gegeben, dann ist die Energiefunktion

$$H = H^{(0)}(p, q) + \lambda H'(p, q, t), \tag{50,4}$$

wobei $\lambda H'$ die Störungsenergie ist und es wird

$$H' = -\mathfrak{P}\mathfrak{E} = -\tfrac{1}{2}\left(\mathfrak{P}\mathfrak{E}^{(0)} e^{2\pi i \nu t} + \mathfrak{P}\mathfrak{E}^{(0)*} e^{-2\pi i \nu t}\right). \tag{50,5}$$

Ist nun x_r eine rechtwinklige Koordinate eines Teilchens des Systems und entwickelt man sie nach λ

$$x_r(n, m) = x_r^{(0)}(n, m)\, e^{2\pi i \nu_{nm} t} + \lambda\, x_r^{(1)}(n, m) + \ldots, \tag{50,6}$$

so läßt sich die Störung der Koordinatenmatrix folgendermaßen berechnen. Als Grundlage gilt die Störungstheorie nicht abgeschlossener Systeme. Ein solches Problem läßt sich mit den in Ziffer 45 und 46 behandelten Methoden lösen, wenn sich der Vorgang auffassen läßt als zeitabhängige Störung eines abgeschlossenen Systems. Man wird nun in (50,4) zunächst solche Koordinaten p^0, q^0 einführen, daß $H^{(0)}$ eine Diagonalmatrix $\mathfrak{W}^{(0)}$ wird:

$$H = \mathfrak{W}^{(0)} + \lambda H'(q^0, p^0, t). \tag{50,7}$$

Die Transformation wird durch die von t abhängige unitäre Matrix $\mathfrak{S}$ erreicht:

$$\begin{aligned} q_k &= \mathfrak{S}^{-1} q_k^0 \mathfrak{S} \\ p_k &= \mathfrak{S}^{-1} p_k^0 \mathfrak{S}, \end{aligned} \tag{50,8}$$

q_k^0 und p_k^0 werden als zeitlich konstant vorausgesetzt, dann ergibt sich durch Differentiation, wobei $(\dot{\mathfrak{S}}^{-1}) = -\mathfrak{S}^{-1}\dot{\mathfrak{S}}\mathfrak{S}^{-1}$ ist:

$$\begin{aligned} \dot{q}_k &= -\mathfrak{S}^{-1}\left(\dot{\mathfrak{S}}\mathfrak{S}^{-1} q_k^0 - q_k^0 \dot{\mathfrak{S}}\mathfrak{S}^{-1}\right)\mathfrak{S} \\ &= -\varkappa\mathfrak{S}^{-1}\left[\dot{\mathfrak{S}}\mathfrak{S}^{-1}, q_k^0\right]\mathfrak{S}, \\ \dot{p}_k &= -\mathfrak{S}^{-1}\left(\dot{\mathfrak{S}}\mathfrak{S}^{-1} p_k^0 - p_k^0 \dot{\mathfrak{S}}\mathfrak{S}^{-1}\right)\mathfrak{S} \\ &= -\varkappa\mathfrak{S}^{-1}\left[\dot{\mathfrak{S}}\mathfrak{S}^{-1}, p_k^0\right]\mathfrak{S}, \end{aligned} \tag{50,9}$$

wobei $\varkappa = \frac{h}{2\pi i}$ und [ ] das Poissonsche Klammersymbol ist [vgl. Gleichung (4,9)].

Nun ist wegen (50,8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial p_k} &= \mathfrak{S}^{-1} \frac{\partial H(p^0, q^0, t)}{\partial p_k^0}\mathfrak{S}, \\ \frac{\partial H(p, q, t)}{\partial q_k} &= \mathfrak{S}^{-1} \frac{\partial H(p^0, q^0, t)}{\partial q_k^0}\mathfrak{S}. \end{aligned} \tag{50,10}$$

Werden (50,9) und (50,10) in die Bewegungsgleichungen

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = [H, q_k], \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = [H, p_k] \tag{50,11}$$

eingesesetzt, so ergibt sich

$$-\varkappa\,[\dot{\mathfrak{S}}\,\mathfrak{S}^{-1},\,q_k{}^0] = [H\,(p^0,q^0,t),\,q_k{}^0]\,,$$
$$-\varkappa\,[\dot{\mathfrak{S}}\,\mathfrak{S}^{-1},\,p_k{}^0] = [H\,(p^0,q^0,t),\,p_k{}^0] \tag{50,12}$$

oder

$$[H\,(p^0,q^0,t) + \varkappa\,\dot{\mathfrak{S}}\,\mathfrak{S}^{-1},\,q_k{}^0] = 0\,,$$
$$[H\,(p^0,q^0,t) + \varkappa\,\dot{\mathfrak{S}}\,\mathfrak{S}^{-1},\,p_k{}^0] = 0\,. \tag{50,13}$$

Diese Gleichungen sind erfüllt, wenn

$$H\,(p^0,q^0,t) = \varkappa\,\dot{\mathfrak{S}}\,\mathfrak{S}^{-1} = 0$$

oder

$$H\,(p^0,q^0,t)\,\mathfrak{S} + \varkappa\,\dot{\mathfrak{S}} \quad = 0 \tag{50,14}$$

ist. Nun ist H zeitabhängig. Da es keine Vorschrift gibt, $\mathfrak{S}(t)$ näher festzulegen, wird angenommen, daß die Störung zur Zeit t_0 beginnt, daß also in (50,4) $H'\,(p,q,t) = 0$ für $t \leq t_0$. Dann ist für $t \leq t_0$ die Lösung durch die Forderung $H\,(p,q) = \mathfrak{W}^{(0)}$ (Diagonalmatrix) festgelegt. Es ist für $t \leq t_0$

$$\mathfrak{S}(t) = e^{-\frac{\mathfrak{W}^{(0)}}{\varkappa}t}\,. \tag{50,15}$$

Macht man für beliebige t den Ansatz

$$\mathfrak{S}(t) = e^{-\frac{\mathfrak{W}^{(0)}}{\varkappa}t}\cdot\mathfrak{B}(t), \tag{50,16}$$

wobei $\mathfrak{B}^{(t)}$ ebenfalls unitär und $\mathfrak{B}(t_0)$ die Einheitsmatrix ist, dann ist

$$\dot{\mathfrak{S}} = -\frac{\mathfrak{W}^{(0)}}{\varkappa}\,\mathfrak{S} + e^{-\frac{\mathfrak{W}^{(0)}}{\varkappa}t}\,\dot{\mathfrak{B}}$$

und daher (50,14) wegen (50,7)

$$\lambda\,H'\,e^{-\frac{\mathfrak{W}^{(0)}}{\varkappa}t}\,\mathfrak{B} + \varkappa\,e^{-\frac{\mathfrak{W}^{(0)}}{\varkappa}t}\,\dot{\mathfrak{B}} = 0\,. \tag{50,17}$$

Wird vorn mit $e^{-\frac{\mathfrak{W}^{(0)}}{\varkappa}t}$ multipliziert und gesetzt

$$\mathfrak{K} = e^{\frac{\mathfrak{W}^{(0)}}{\varkappa}t}\,H'\,e^{-\frac{\mathfrak{W}^{(0)}}{\varkappa}t} = \left(H'_{nm}e^{2\pi i\nu^{(0)}_{nm}t}\right), \tag{50,18}$$

so entsteht

$$x\,\dot{\mathfrak{B}} + \lambda\,\mathfrak{K}\,\mathfrak{B} = 0\,. \tag{50,19}$$

Wird nun als Lösung von (50,19) eine Potenzreihe nach λ angesetzt,

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^{(0)} + \lambda\,\mathfrak{B}^{(1)} + \lambda^2\,\mathfrak{B}^{(2)} + \cdots, \tag{50,20}$$

so ergeben sich durch Koeffizientenvergleich die Näherungsgleichungen

$$\begin{aligned} \varkappa\,\dot{\mathfrak{V}}^{(0)} &= 0 \\ \varkappa\,\dot{\mathfrak{V}}^{(1)} &= -\mathfrak{K}\,\mathfrak{V}^{(0)} \\ \varkappa\,\dot{\mathfrak{V}}^{(2)} &= -\mathfrak{K}\,\mathfrak{V}^{(1)} \\ \cdots\quad & \cdots\;. \end{aligned} \tag{50,21}$$

Wegen $\mathfrak{V}(t_0) = \mathfrak{E}$ folgen aus (50,20) die Anfangsbedingungen

$$\mathfrak{V}^{(0)}(t_0) = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{V}^{(l)}(t_0) = 0. \tag{50,22}$$

Als Lösung von (50,21) unter Berücksichtigung von (50,22) ergibt sich nun

$$\mathfrak{V}^{0}(t) = \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{V}^{(l)}(t) = -\frac{1}{\varkappa}\int\limits_{t_0}^{t} \mathfrak{K}\,\mathfrak{V}^{(l-1)}\,dt, \tag{50,23}$$

d. h. eine Rekursionsformel, aus der $\mathfrak{V}^{(1)}, \mathfrak{V}^{(2)}, \ldots$ berechnet werden kann. Es soll nun eine rein periodische Störung betrachtet werden; sie werde als Grenzfall einer langsam anklingenden Störung angesehen, die für $t_0 = -\infty$ verschwindet. Es werde nun gesetzt:

$$H' = \left(\mathfrak{A}(p^0, q^0)\, e^{2\pi i \nu t} + \mathfrak{A}^{\dagger}(p^0, q^0)\, e^{-2\pi i \nu t}\right) \cdot e^{2\pi \sigma t}, \tag{50,24}$$

wobei ν reell und $\sigma > 0$; dann ist H' für eine willkürliche Matrix $\mathfrak{A}$ hermitisch. Nach (50,18) wird

$$K_{nm} = A_{nm}\, e^{2\pi i[(\nu^{(0)}_{nm}+\nu)-i\sigma]t} + A^{\dagger}_{nm}\, e^{2\pi i[(\nu^{(0)}_{nm}-\nu)-i\sigma]t}. \tag{50,25}$$

Aus (50,23) folgt nun mit $t_0 = -\infty$

$$V^{(1)}_{nm} = -\frac{A_{nm}}{h\,[(\nu^{(0)}_{nm}+\nu)-i\sigma]}\, e^{2\pi i[(\nu^{(0)}_{nm}+\nu)-i\sigma]t} - \frac{A^{\dagger}_{nm}}{h\,[(\nu^{(0)}_{nm}-\nu)-i\sigma]}\, e^{2\pi i[(\nu^{(0)}_{nm}-\nu)-i\sigma]t}. \tag{50,26}$$

Für $\sigma > 0$ und nicht zu große t wird dann

$$V^{(1)}_{nm} = -\frac{A_{nm}}{h\,(\nu^{(0)}_{nm}+\nu)}\, e^{2\pi i(\nu^{(0)}_{nm}+\nu)t} - \frac{A^{\dagger}_{nm}}{h\,(\nu^{(0)}_{nm}-\nu)}\, e^{2\pi i(\nu^{(0)}_{nm}-\nu)t} \tag{50,27}$$

Nun kann die Lösung einer Koordinatenmatrix $\mathfrak{q}$ berechnet werden. Nach (50,16) ist

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{S}^{-1}\,\mathfrak{q}^{(0)}\,\mathfrak{S} = \mathfrak{V}^{-1}\,\mathfrak{Q}^{(0)}\,\mathfrak{V}, \tag{50,28}$$

wobei

$$\mathfrak{Q}^{(0)} = e^{\frac{\mathfrak{W}^{(0)}}{\varkappa}t}\,\mathfrak{q}^{(0)}\,e^{-\frac{\mathfrak{W}^{(0)}}{\varkappa}t} = \left(\mathfrak{q}^{(0)}_{nm}\,e^{2\pi i \nu^{(0)}_{nm} t}\right). \tag{50,29}$$

Wird für $\mathfrak{q}$ die Entwicklung angesetzt

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{Q}^{(0)} + \lambda\,\mathfrak{q}^{(1)} + \cdots, \tag{50,30}$$

so erhält man

$$\mathfrak{q}^{(1)}_{nm} = \sum_k \left(\mathfrak{q}^{(0)}_{nk}\, V^{(1)}_{km}\, e^{2\pi i \nu_{nk} t} - V^{(1)}_{nk}\,\mathfrak{q}^{(0)}_{km}\, e^{2\pi i \nu_{km} t}\right) \tag{50,31}$$

oder wegen $\nu_{nk} + \nu_{km} = \nu_{nm}$ und (50,27)

$$\mathfrak{q}_{nm}^{(1)} = e^{2\pi i(\nu_{nm}+\nu)t} \sum_k \left(\frac{A_{nk}\, q_{km}^{(0)}}{h(\nu_{nk}+\nu)} - \frac{q_{nk}^{(0)}\, A_{km}}{h(\nu_{km}+\nu)} \right) + e^{2\pi i(\nu_{nm}-\nu)t} \sum_k \left(\frac{A_{nk}^{\dagger}\, q_{km}^{(0)}}{h(\nu_{nk}-\nu)} - \frac{q_{nk}^{(0)}\, A_{km}^{\dagger}}{h(\nu_{nm}-\nu)} \right). \quad (50,32)$$

Nunmehr kann die in (50,6) betrachtete Störung der Koordinatenmatrix angegeben werden. Es wird

$$\begin{aligned} x_r^{(1)}(n,m) &= \frac{1}{2} e^{2\pi i(\nu_{nm}+\nu)t} \sum_k \left(\frac{x_{r(n,k)}^{(0)} (\mathfrak{P}_{(k,m)}^{(0)} \mathfrak{E}^{(0)})}{h(\nu_{km}+\nu)} - \frac{(\mathfrak{P}_{(n,k)}^{(0)} \mathfrak{E}^{(0)})\, x_{r(k,m)}^{(0)}}{h(\nu_{nk}+\nu)} \right) \\ &+ \frac{1}{2} e^{2\pi i(\nu_{nm}-\nu)t} \sum_k \left(\frac{x_{r(n,k)}^{(0)} (\mathfrak{P}_{(k,m)}^{(0)} \mathfrak{E}^{(0)})}{h(\nu_{km}-\nu)} - \frac{(\mathfrak{P}_{(n,k)}^{(0)} \mathfrak{E}^{(0)})\, x_{r(k,m)}^{(0)}}{h(\nu_{nk}-\nu)} \right), \end{aligned} \quad (50,33)$$

und daher die Störung des elektrischen Moments

$$\mathfrak{P}_{(n,m)} = \mathfrak{P}_{(n,m)}^{(0)} e^{2\pi i \nu_{nm} t} + \lambda \mathfrak{P}_{(n,m)}^{(1)} + \cdots \quad (50,34)$$

in erster Näherung

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}^{(1)}(n,m) &= \frac{1}{2} e^{2\pi i(\nu_{nm}+\nu)t} \sum_k \left(\frac{\mathfrak{P}^{(0)}(n,k) (\mathfrak{P}^{(0)}(k,m) \mathfrak{E}^{(0)})}{h(\nu_{km}+\nu)} - \frac{(\mathfrak{P}^{(0)}(n,k) \mathfrak{E}^{(0)})\, \mathfrak{P}^{(0)}(k,m)}{h(\nu_{nk}+\nu)} \right) \\ &+ \frac{1}{2} e^{2\pi i(\nu_{nm}-\nu)t} \sum_k \left(\frac{\mathfrak{P}^{(0)}(n,k) (\mathfrak{P}^{(0)}(k,m) \mathfrak{E}^{(0)*})}{h(\nu_{km}-\nu)} - \frac{(\mathfrak{P}^{(0)}(n,k) \mathfrak{E}^{(0)*})\, \mathfrak{P}^{(0)}(k,m)}{h(\nu_{nk}-\nu)} \right). \end{aligned} \quad (50,35)$$

Diese Formeln enthalten die Grundlage für die Dispersion des Lichtes. HEISENBERG vertritt den Standpunkt, daß das elektrische Moment $\mathfrak{P}$ die von Systemen emittierte Strahlung bestimmt. Das einfallende Licht erzeugt ein Zusatzmoment (50,35), dessen Matrixelemente Frequenz und Intensität des „gestreuten" Lichtes bestimmen. Es wird nun die klassische Erklärung der Farbenzerstreuung in die Quantenmechanik übernommen, nach der die Streuwellen der einzelnen Atome sich durch Interferenz miteinander und mit der einfallenden ebenen Welle so beeinflussen, daß eine Welle mit anderer Wellenlänge im Körper zu laufen scheint.

Zunächst werde noch der Grenzfall hoher Lichtfrequenzen ν untersucht, d. h. es sei ν groß gegen alle Eigenfrequenzen ν_{nm} des Systems, die mechanische Bindung der Teilchen also relativ schwach gegen die Lichteinwirkung. Die Behauptung ist dann, daß die Teilchen so schwingen, als wären sie frei und gehorchten den Gesetzen der klassischen Theorie.

Wenn man nämlich die Summen in (50,33) nach Potenzen von $\nu_{nm}/_{\nu}$ entwickelt, so erhält man

$$\begin{aligned} x_r^{(1)}(n,m) &= \frac{e^{2\pi i \nu_{nm} t}}{h\nu} \varkappa \left\{ \mathfrak{F}_x [x_r^{(0)}, X^{(0)}] + \mathfrak{F}_y [x_r^{(0)}, Y^{(0)}] + \mathfrak{F}_z [x_r^{(0)}, Z^{(0)}] \right\}_{nm} \\ &- \frac{e^{2\pi i \nu_{nm} t}}{h\nu} \frac{\varkappa}{2\pi i \nu} \left\{ \mathfrak{E}_x [x_r^{(0)}, \dot{X}^{(0)}] + \mathfrak{E}_y [x_r^{(0)}, \dot{Y}^{(0)}] + \mathfrak{E}_z [x_r^{(0)}, \dot{Z}^{(0)}] \right\}_{nm}, \end{aligned} \quad (50,36)$$

dabei ist zur Abkürzung gesetzt:

der Vektor
$$\mathfrak{F} = \frac{1}{2i} (\mathfrak{E}^{(0)} e^{2\pi i \nu t} - \mathfrak{E}^{(0)} e^{-2\pi i \nu t}) \quad (50,37)$$

und die Klammersymbole

$$
\begin{aligned}
[x_r^{(0)}, X^{(0)}]_{nm} &= \frac{1}{\varkappa}(x_r^{(0)} X^{(0)} - X^{(0)} x_r^{(0)})_{nm} \\
&= \frac{1}{\varkappa}\sum_k (x_r^{(0)}(n,k)\, X^{(0)}(k,m) - X^{(0)}(n,k)\, x_r^{(0)}(k,m)), \\
&\ldots\ldots \\
[x_r^{(0)}, \dot{X}^{(0)}]_{nm} &= \frac{1}{\varkappa}(x_r^{(0)} \dot{X}^{(0)} - \dot{X}^{(0)} x_r^{(0)}) \\
&= \frac{2\pi i}{\varkappa}\sum_k (x_r^{(0)}(n,k)\, \dot{X}^{(0)}(k,m) - \dot{X}^{(0)}(n,k)\, x^{(0)}(k,m)) \\
&\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{50,38}
$$

Die X, Y, Z sind die Komponenten des elektrischen Vektors $\mathfrak{P}$. Da weiterhin

$$X = \sum_k e_k z_k\,, \quad Y = \sum_k e_k y_k\,, \quad Z = \sum_k e_k z_k \tag{50,39}$$

ist, wird

$$
\begin{aligned}
[x_r^{(0)}, X^{(0)}] &= \sum_s e_s [x_r^{(0)}, x_s^{(0)}] = 0\,, \ \ldots \\
[x_r^{(0)}, \dot{X}^{(0)}] &= \sum_s \frac{e_s}{m_s}[x_r^{(0)}, p_{xs}^{(0)}] = -\frac{e_r}{m_r}\,, \ \ldots
\end{aligned}
\tag{50,40}
$$

wegen der kanonischen Vertauschungsregeln.

Daher geht (50,36) über in

$$x_r^{(1)}(n,m) = -\delta_{nm}\,\mathfrak{E}_x \frac{e_r}{m_r (2\pi\nu)^2}\,, \tag{50,41}$$

d. h. $x_r^{(1)}$ wird proportional der Einheitsmatrix und der Proportionalitätsfaktor genügt der Differentialgleichung

$$m_r \ddot{x} = e_r \mathfrak{E}_x = e_r a_x \cos(2\pi\nu t + \varphi_x)\,; \tag{50,42}$$

sie stellt das Mitschwingen eines freien Teilchens der Masse m_r und der Ladung e_r im Feld $\mathfrak{E}$ dar. Damit ist gezeigt, daß im Grenzfall hoher Lichtfrequenzen die Gesetze der klassischen Theorie gelten. Außerdem erkennt man, daß die kanonischen Vertauschungsregeln zwischen den rechtwinkligen Koordinaten und Impulsen gerade die notwendige und hinreichende Bedingung dafür darstellen, daß sich das System im Grenzfall schwacher Kräfte ($\nu_{nm}/\nu \ll 1$) wie ein klassisches System freier Teilchen verhält.

Die Gleichungen (50,35) stellen für $n = m$ das vom Licht erregte mittlere Moment des Systems als lineare Vektorfunktion der elektrischen Feldstärke dar. In Verbindung mit der aus den Maxwellschen Gleichungen folgenden Formel für das mittlere Moment pro Volumeneinheit $\mathfrak{P}$

$$\mathfrak{P} - \mathfrak{n}^2 \mathfrak{s}(\mathfrak{s}\mathfrak{P}) = \frac{\mathfrak{n}^2 - 1}{4\pi}\mathfrak{E}, \tag{50,43}$$

wobei $\mathfrak{n}$ der Brechungsindex, $\mathfrak{s}$ der Einheitsvektor der Wellennormale ist, erhält man die Bestimmungsgleichungen für die Wellenamplituden und den Brechungsindex. Bei nichtentarteten Systemen wird Doppelbrechung auftreten; ist die Rich-

tungsentartung der Atome eines Gases durch ein elektrisches bzw. magnetisches Feld aufgehoben, so erhält man den KERR-Effekt bzw. FARADAY-Effekt. Hier werde der Fall eines sich selbst überlassenen Gases mit richtungsentarteten Atomen betrachtet. Nun kann man aus dem Vektor $\mathfrak{P}^{(0)}$ Größen bilden, die unabhängig von der Orientierung des Atoms sind, nämlich die Komponenten von

$$Sp\,\mathfrak{P}^{(1)(r,r)} = \sum_m \mathfrak{P}^{(1)(r,r)}_{mm} \tag{50,44}$$

wo r alle Quantenzahlen (n, j) außer der äquatorialen m zusammenfaßt. Ist g_r das Gewicht des Zustandes r, so ist durch

$$\overline{\mathfrak{P}}^{(r,r)} = \frac{1}{g_r} Sp\,\mathfrak{P}^{(1)(r,r)} = \frac{1}{g_r} \sum_m \mathfrak{P}^{(1)(r,r)}_{mm} \tag{50,45}$$

das mittlere induzierte Moment eines einfachen Zustandes (vom Gewicht 1) definiert. Es kann in die MAXWELLschen Gleichungen als mittleres Moment je Teilchen eingesetzt werden. Daß es dem Feldvektor $\mathfrak{E}$ proportional ist, ergibt sich folgendermaßen:

Aus (50,35) erhält man

$$\begin{aligned} g_r \overline{\mathfrak{P}}^{(r,r)} = \frac{1}{2} e^{2\pi i \nu t} \sum_s \left(\frac{Sp[\mathfrak{P}^{(0)(r,s)} (\mathfrak{P}^{(0)(s,r)} \mathfrak{E}^{(0)})]}{h(\nu^{(s,r)} + \nu)} - \frac{Sp[(\mathfrak{P}^{(0)(r,s)} \mathfrak{E}^{(0)}) \mathfrak{P}^{(0)(s,r)}]}{h(\nu^{(r,s)} + \nu)} \right) \\ + \frac{1}{2} e^{-2\pi i \nu t} \sum_s \left(\frac{Sp[\mathfrak{P}^{(0)(r,s)} (\mathfrak{P}^{(0)(s,r)} \mathfrak{E}^{(0)})]}{h(\nu^{(s,r)} - \nu)} - \frac{Sp[(\mathfrak{P}^{(0)(r,s)} \mathfrak{E}^{(0)}) \mathfrak{P}^{(0)(s,r)}]}{h(\nu^{(r,s)} - \nu)} \right). \end{aligned} \tag{50,46}$$

Beachtet man, daß $\nu^{(r,s)} = -\nu^{(s,r)}$, so erhält man analog (49,52)

$$\begin{aligned} g_r \overline{\mathfrak{P}}^{(r,r)} = \frac{1}{2} (\mathfrak{E}^{(0)} e^{2\pi i \nu t} + \mathfrak{E}^{(0)*} e^{-2\pi i \nu t}) \cdot \frac{1}{3} \sum_s Sp\,(\mathfrak{P}^{(0)(r,s)} \mathfrak{P}^{(0)(s,r)}) \\ \left(\frac{1}{h(\nu^{(s,r)} - \nu)} + \frac{1}{h(\nu^{(s,r)} + \nu)} \right) = \mathfrak{E} \cdot \frac{2}{3h} \sum_s (\mathfrak{P}^{(0)(r,s)})^2 \cdot \frac{\nu^{(s,r)}}{\nu^{(s,r)^2} - \nu^2}. \end{aligned} \tag{50,47}$$

Wird noch die Deformierbarkeit $\alpha(r)$ für ein hermitisches Wechselfeld eingeführt

$$\overline{\mathfrak{P}}^{(r,r)} = \alpha_r \mathfrak{E}, \tag{50,48}$$

so ergibt (50,47)

$$\alpha_r = \frac{2}{3h g_r} \sum_s (\mathfrak{P}^{(0)(r,s)})^2 \frac{\nu^{(s,r)}}{\nu^{(s,r)^2} - \nu^2}. \tag{50,49}$$

Der Brechungsindex n errechnet sich nun folgendermaßen: Durch skalare Multiplikation von (50,43) mit $\mathfrak{s}$ folgt

$$\mathfrak{s}\mathfrak{P} = -\frac{1}{4\pi} \mathfrak{s}\mathfrak{E}, \tag{50,50}$$

was bedeutet, daß der Verschiebungsfaktor $\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P}$ senkrecht zu $\mathfrak{s}$ steht

$$\mathfrak{D}\mathfrak{s} = 0. \tag{50,51}$$

Ist $\mathfrak{P}$ parallel zu $\mathfrak{E}$, so ist auch

$$\mathfrak{E}\mathfrak{s} = 0. \tag{50,52}$$

Wenn nun N_r die Anzahl Teilchen je Volumeneinheit im Zustand r ist, so ist das $\mathfrak{P}$ in (50,43) gleichbedeutend mit

$$\sum_r N_r \overline{\mathfrak{P}}^{(r,r)}.$$

Und es ergibt sich aus (50,43) und (50,48)

$$n^2 = 1 + 4\pi \sum_r N_r \alpha_r. \tag{50,53}$$

Wird in (50,53) der Ausdruck (50,49) eingesetzt, so hat man die Dispersionsformel, die den Brechungsindex als Funktion der Frequenz darstellt, gewonnen.

Statt (50,49) wird auch geschrieben:

$$\alpha_r = \frac{e^2}{4\pi^2 m_0} \sum_s \frac{f^{(s,r)}}{\nu^{(s,r)2} - \nu^2}, \tag{50,54}$$

wobei

$$f^{(s,r)} = \frac{8\pi^2 m_0 \nu^{(s,r)}}{3 e^2 h g_r} (\mathfrak{P}^{(0)(s,r)})^2 \tag{50,55}$$

die Stärke der Eigenschwingung $\nu^{(s,r)}$ bedeutet; denn jedes Glied der Summe (50,54) hat bis auf den Faktor $f^{(s,r)}$ die Form der Resonanzformel für einen harmonischen Oszillator der Masse m_0, Ladung e und Frequenz $\nu^{(s,r)}$. Diese Stärkefaktoren sind positiv oder negativ, je nachdem $\nu^{(s,r)} > 0$ oder < 0 ist, d. h. je nachdem das Energieniveau r tiefer oder höher liegt als s. Das ist aber nur dann möglich, wenn r nicht das tiefste Energieniveau des betrachteten Systems ist. Die erste quantentheoretische Dispersionsformel wurde von LADENBURG angegeben; die Glieder „negativer Dispersion“ wurden von KRAMERS aus Gründen des Korrespondenzprinzips hinzugefügt.

Es sollen nun noch die $f^{(s,r)}$ durch beobachtbare Größen ausgedrückt werden. Die beim Übergang $s \to r$ spontan emittierte Lichtenergie ist

$$\mathfrak{J}^{(s,r)} = \frac{64\pi^4 \nu^{(s,r)4}}{3c^3} (\mathfrak{P}^{(0)(s,r)})^2, \tag{50,56}$$

daher folgt

$$f^{(s,r)} = \frac{m_0 c^3}{8\pi^2 e^2 h \nu^{(s,r)3} g_r} \mathfrak{J}^{(s,r)}. \tag{50,57}$$

Tritt die je Zeiteinheit emittierte Energie $\mathfrak{J}^{(s,r)}$ als Lichtquanten der Energie $h\nu^{(s,r)}$ in Erscheinung, so ist deren Zahl je Zeiteinheit $\mathfrak{J}^{(s,r)}/h\nu^{(s,r)}$. Diese Quanten gehen vom Zustand s aus, der durch ein Feld in g_s Einzelterme aufgespaltet werden kann.

Die spontane Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit von dem Einzelterm ist also

$$A^{(s,r)} = \frac{\mathfrak{J}^{(s,r)}}{g_s h \nu^{(s,r)}}, \quad \nu^{(s,r)} > 0 \tag{50,58}$$

oder

$$A^{(r,s)} = -\frac{g_s}{g_r g_s} \frac{\mathfrak{J}^{(s,r)}}{h\nu^{(s,r)}}, \quad \nu^{(s,r)} < 0. \tag{50,59}$$

Die Wahrscheinlichkeit des erzwungenen Überganges $s - r$ ist definiert durch

$$B^{(s,r)} = \frac{c^3}{8\pi h \nu^{(s,r)}} A^{(s,r)}, \qquad g_r B^{(r,s)} = g_s B^{(s,r)}. \tag{50,60}$$

Nach (50,60) ist

$$B^{(s,r)} = \frac{g_r}{g_s} B^{(r,s)} = \frac{c^3}{8\pi h \nu^{(r,s)^3}} A^{(r,s)} \frac{g_r}{g_s}, \qquad \nu^{(s,r)} < 0 \tag{50,61}$$

nach (50,57), (50,58) und (50,59)

$$\begin{aligned} f^{(s,r)} &= \frac{m_0 c^3}{8\pi^2 e^2 \nu^{(s,r)^2}} \frac{g_s}{g_r} A^{(s,r)}, \qquad \nu^{(s,r)} > 0 \\ f^{(s,r)} &= -\frac{m_0 c^3}{8\pi^2 e^2 \nu^{(r,s)^2}} A^{(r,s)}, \qquad \nu^{(s,r)} < 0 \end{aligned} \tag{50,62}$$

oder nach (50,60) und (50,61)

$$f^{(s,r)} = \frac{m_0 h \nu^{(s,r)}}{\pi e^2} \frac{g_s}{g_r} B^{(s,r)}. \tag{50,63}$$

Nach der klassischen Elektrodynamik ist die Dämpfungskonstante $\tau^{(s,r)}$ eines Dipols der Frequenz $\nu^{(s,r)}$, dessen Energie nach dem Gesetz

$$W = W_0 e^{-\frac{t}{\tau^{(s,r)}}} \tag{50,64}$$

abklingt

$$\tau^{(s,r)} = \frac{3 c^3 m_0}{8\pi^2 e^2 \nu^{(s,r)^2}}. \tag{50,65}$$

Daher wird

$$\begin{aligned} f^{(s,r)} &= \frac{1}{3} \frac{g_s}{g_r} \tau^{(s,r)} A^{(s,r)}, \qquad \nu^{(s,r)} > 0 \\ f^{(s,r)} &= -\frac{1}{3} \tau^{(s,r)} A^{(r,s)}, \qquad \nu^{(s,r)} < 0. \end{aligned} \tag{50,66}$$

Die Stärke der Dispersion ist also, abgesehen von Gewichtsfaktor g_s/g_r, gleich der Anzahl der Sprünge $s - r$ in der Zeit $\tau^{(s,r)}/3$. Dabei rührt der Faktor $\frac{1}{3}$ daher, daß die Übergangswahrscheinlichkeiten $A^{(r,s)}$ auf ein frei drehbares System bezogen sind, während $\tau^{(s,r)}$ die Abklingzeit des linearen Oszillators bedeutet.

Die Dispersionsformel (50,54) kann mit (50,63) auch geschrieben werden:

$$\alpha_r = \frac{1}{4\pi^3} \sum_s \frac{g_s}{g_r} \frac{h \nu^{(s,r)} \cdot B^{(s,r)}}{\nu^{(s,r)^2} - \nu^2} \tag{50,67}$$

oder nach (50,64)

$$\alpha_r = \frac{e^2}{4\pi^2 m_0} \left\{ \sum_{\nu^{(s,r)} > 0} \frac{\tau^{(s,r)}}{3} \frac{g_s}{g_r} \frac{A^{(s,r)}}{\nu^{(s,r)^2} - \nu^2} - \sum_{\nu^{(s,r)} < 0} \frac{\tau^{(s,r)}}{3} \frac{A^{(r,s)}}{\nu^{(r,s)^2} - \nu^2} \right\}; \tag{50,68}$$

hierin ist zugleich die Trennung in positive und negative Dispersion durchgeführt.

Die Formeln (50,66), die den Zusammenhang zwischen Stärke der Spektrallinien und spontaner Übergangswahrscheinlichkeit darstellen, wurden von LADENBURG experimentell geprüft und bestätigt.

51. Quantenmechanik und Wellenmechanik

Die quantentheoretische Verallgemeinerung der HAMILTON-JACOBIschen Differentialgleichung ist durch die SCHRÖDINGERsche Gleichung

$$-\frac{h^2}{4\pi^2}\frac{1}{2\mu}\Delta\varphi + U(x, y, z) = W\varphi \tag{51,1}$$

gegeben, wobei Δ der LAPLACEsche Operator $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ bedeutet.

Wird nämlich der Ansatz gemacht:

$$\varphi = e^{\frac{2\pi i}{h} S(x,y,z)}, \tag{51,2}$$

so ergibt sich

$$-\frac{1}{2\mu}\frac{h}{2\pi i}\Delta S + \frac{1}{2\mu}(\operatorname{grad} S)^2 + U(x, y, z) = W; \tag{51,3}$$

bei kleinen Wellenlängen ($h \to 0$) kann das 1. Glied in (51,3) gestrichen werden, und es ergibt sich in der Tat die HAMILTON-JACOBIsche Differentialgleichung

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z};\ x, y, z\right) = \frac{1}{2\mu}(\operatorname{grad} S)^2 + U(x, y, z) = W. \tag{51,4}$$

Zunächst sollen nun die mathematischen Beziehungen der SCHRÖDINGER-Gleichung zum Matrizenformalismus der aus dem Korrespondenzprinzip entwickelten Quantenmechanik geklärt werden.

Als einfachster Fall werde die eindimensionale Bewegung eines Massenpunktes betrachtet, der auf ein endliches Intervall der x-Achse – etwa von $x = 0$ bis $x = 1$ – beschränkt ist. Für die SCHRÖDINGERsche Amplitude $\varphi(x)$ gilt daher

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0, \tag{51,5}$$

und es gilt im Intervall $0 < x < 1$ für $\varphi(x)$ die SCHRÖDINGER-Gleichung

$$-\frac{h^2}{8\pi^2\mu}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \{U(x) - W\}\varphi = 0. \tag{51,6}$$

Dieses durch (51,5) und (51,6) definierte mathematische Problem besitzt stets eine diskrete unendliche Reihe von Eigenwerten $W_0, W_1, W_2, \ldots$; d. h. also, es gibt zu jedem $W = W_n$ eine zugehörige Eigenfunktion φ_n:

$$\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = 0, \quad -\frac{h^2}{8\pi^2\mu}\frac{d^2\varphi_n}{dx^2} + \{U(x) - W_n\}\varphi_n = 0, \tag{51,7}$$

wobei also $\varphi_n(x)$ nicht etwa identisch gleich Null ist. Aber für jeden anderen Wert W sind nun die Bedingungen (51,5) und (51,6) nur durch $\varphi(x) = 0$ zu erfüllen. Ein Eigenwert W_n wird dann als „einfach" bezeichnet, wenn die zu ihm gehörende Eigenfunktion $\varphi_n(x)$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist. Solange φ_n reell ist, ist die komplex konjugierte φ_n^* mit φ_n selbst identisch: $\varphi_n^* = \varphi_n$.

Werden zwei verschiedene Eigenwerte W_n, W_m betrachtet, so haben die zugehörigen Eigenfunktionen die Eigenschaft

$$\int_0^1 \varphi_m^* (x)\, \varphi_n (x)\, dx = 0 \qquad (n \neq m). \tag{51,8}$$

Diese Eigenschaft nennt man die Orthogonalität der Eigenfunktionen.

Da φ_n der Gleichung (51,7) und φ_m^* der Gleichung

$$-\frac{h^2}{8\pi^2\mu}\,\frac{d^2\varphi_m^*}{dx^2} + \{U(x) - W_m\}\,\varphi_m^* = 0 \tag{51,9}$$

gehorcht, folgt nach Multiplikation von (51,7) mit φ_m^* und von (51,9) mit φ_n und Subtraktion der beiden Gleichungen

$$-\frac{h^2}{8\pi^2\mu}\left(\varphi_m^*\,\frac{d^2\varphi_n}{dx^2} - \varphi_n\,\frac{d^2\varphi_m^*}{dx^2}\right) = (W_n - W_m)\,\varphi_m^*\varphi_m. \tag{51,10}$$

Integration liefert

$$\int_0^1 (\varphi_m^*\varphi_n'' - \varphi_n\varphi_m^{*\prime\prime})\, dx = \int_0^1 (\varphi_m^*\varphi_n' - \varphi_n\varphi_m^{*\prime})'\, dx = \varphi_m^*\varphi_n' - \varphi_n\varphi_m^{*\prime}\Big|_0^1 = 0$$

wegen (51,5). Also muß auch die rechte Seite von (51,10) bei Integration Null ergeben.

Die zum kleinsten Eigenwert W_0 gehörende Eigenfunktion φ_0 verschwindet nur an den Intervallenden $x = 0$, $x = 1$. Dagegen hat φ_n, wenn die W_n der Größe nach geordnet sind, genau n-Nullstellen (Knoten) im Innern des Intervalls.

$\varphi_n(x)$ ist normiert, wenn

$$\int_0^1 \varphi_n^* (x)\, \varphi_n (x)\, dx = \int_0^1 |\varphi_n (x)|^2\, dx = 1. \tag{51,11}$$

Eine nichtnormierte Eigenfunktion kann durch einen geeigneten konstanten Faktor zu einer normierten gemacht werden. (51,8) und (51,11) lauten zusammengefaßt

$$\int_0^1 \varphi_m^*(x)\, \varphi_n(x)\, dx = \delta_{mn}. \tag{51,12}$$

Sind die Grenzen durch $-\infty$ und $+\infty$ gegeben, so tritt an die Stelle der Randbedingung $\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = 0$ die Bedingung, daß $\varphi_n(x)$ für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$ so stark zu Null geht, daß das Integral über $(\varphi_n)^2$ existiert und gleich 1 gemacht werden kann

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^*(x)\, \varphi_n(x)\, dx = \delta_{mn}. \tag{51,13}$$

Es war schon früher ausgesprochen worden, daß die Eigenwerte W_n des SCHRÖDINGER-Problems zu identifizieren sind mit den exakten quantenmechanischen Energiewerten des gestellten mechanischen Problems. Der Äquivalenzbeweis ist von SCHRÖDINGER geführt worden; er gibt zugleich Gelegenheit, die Beziehung der Eigenfunktionen φ_n zu den Matrizen der Quantenmechanik klarzulegen.

Aus den normierten Eigenfunktionen φ_n können die Matrizen $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{p}$ des quantenmechanischen Problems folgendermaßen berechnet werden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{q}_{mn} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* (q)\, q\, \varphi_n (q)\, dq\,, \\ \mathfrak{p}_{mn} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* (q)\, \frac{h}{2\pi i}\, \frac{d}{dq}\, \varphi_n (q)\, dq\,. \end{aligned} \tag{51,14}$$

Dabei ist der Übersichtlichkeit halber x durch q ersetzt.

Zunächst wird bewiesen, daß mit (51,14) die kanonische Vertauschungsregel

$$\mathfrak{p}\mathfrak{q} - \mathfrak{q}\mathfrak{p} = \frac{h}{2\pi i}\, \mathfrak{E} \tag{51,15}$$

erfüllt ist. Es wird

$$(\mathfrak{p}\mathfrak{q})_{mn} = \sum_k \mathfrak{p}_{mn}\, \mathfrak{q}_{kn} = \frac{h}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^*\, \frac{d}{dq} \sum_k \varphi_k\, \mathfrak{q}_{kn}\, dq\,. \tag{51,16}$$

Nun ist $q\, \varphi_n (q)$ in eine Reihe nach den $\varphi_k (q)$ entwickelbar:

$$q\, \varphi_n (q) = \sum_k \varphi_k (q) \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k^* (q)\, q\, \varphi_n (q)\, dq = \sum_k \varphi_k (q)\, \mathfrak{q}_{kn}\,, \tag{51,17}$$

also wird

$$(\mathfrak{p}\mathfrak{q})_{mn} = \frac{h}{2\pi i} \int_{+\infty}^{-\infty} \varphi_m^*\, \frac{d}{dq}\, q\, \varphi_n\, dq\,. \tag{51,18}$$

Ebenso wird

$$(\mathfrak{q}\,\mathfrak{p})_{mn} = \sum \mathfrak{q}_{mk}\, \mathfrak{p}_{km} = \int_{+\infty}^{-\infty} \varphi_m^*\, q \sum_k \varphi_k\, \mathfrak{p}_{kn}\, dq\,, \tag{51,19}$$

da

$$\frac{h}{2\pi i}\, \varphi_n'(q) = \sum_k \mathfrak{p}_{kn}\, \varphi_k (q) \tag{51,20}$$

ist, wird

$$(\mathfrak{q}\,\mathfrak{p})_{mn} = \frac{h}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^*\, q\, \frac{d}{dq}\, \varphi_n\, dq\,. \tag{51,21}$$

Also ist nach (51,18) und (51,21)

$$(\mathfrak{p}\mathfrak{q} - \mathfrak{q}\,\mathfrak{p})_{mn} = \frac{h}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* \left\{ \frac{d}{dq}\, q\, \varphi_n - q\, \frac{d}{dq}\, \varphi_n \right\} dq = \frac{h}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^*\, \varphi_n\, dq = \frac{h}{2\pi i}\, \delta_{mn}\,,$$

womit (51,15) bewiesen ist.

Weiterhin ergibt sich für die beiden Matrizen $\mathfrak{p}^2$ und $\mathfrak{U}(\mathfrak{q})$

$$(\mathfrak{p}^2)_{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* \cdot \frac{-h^2}{4\pi^2}\, \frac{d^2}{dq^2}\, \varphi_n \cdot dq \tag{51,22}$$

und

$$\mathfrak{U}(\mathfrak{q})_{mm} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* \cdot U(q) \cdot \varphi_n \cdot dq\,. \tag{51,23}$$

Der Beweis von (51,22) ergibt sich folgendermaßen nach (51,14) und (51,20)

$$(\mathfrak{p}^2)_{mn} = \sum_k \mathfrak{p}_{mk}\,\mathfrak{p}_{km} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* \frac{h}{2\pi i}\frac{d}{dq} \sum_k \varphi_k\,\mathfrak{p}_{kn}\cdot dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* \left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \frac{d^2}{dq^2}\varphi_n\cdot dq.$$

Der Beweis von (51,23) stützt sich auf den Nachweis, daß für den Fall einer Potenz $\mathfrak{U}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}^r$ die Behauptung richtig ist; sie gilt dann auch für eine Potenzreihe $\mathfrak{U}(\mathfrak{q}) = \sum_r c_r\,\mathfrak{q}^r$, also für jedes $\mathfrak{U}(\mathfrak{q})$. Ist die Behauptung für den Fall $\mathfrak{U}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}^r$ richtig, dann auch für $\mathfrak{U}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q}^{r+1}$; denn es wird nach (51,14) und (51,17)

$$(\mathfrak{q}^{r+1})_{mn} = \sum_k (\mathfrak{q}^r)_{mk}\,\mathfrak{q}_{kn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^*\, q^r \sum_k \varphi_k\,\mathfrak{q}_{kn}\cdot dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^*\, q^r\, q\, \varphi_n\, dq, \qquad (51,24)$$

womit der Beweis erbracht ist.

Die nach (51,14) konstruierten Matrizen haben die Eigenschaft, daß

$$\mathfrak{H}(\mathfrak{p},\mathfrak{q}) = \frac{\mathfrak{p}^2}{2m} + \mathfrak{U}(\mathfrak{q}) \qquad (51,25)$$

eine Diagonalmatrix wird; denn es wird nach (51,22) und (51,23)

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_{mn} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* \left\{-\frac{h^2}{8\pi^2\mu}\frac{d^2}{dq^2}\varphi_n + U(q)\,\varphi_n\right\} dq \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^*\, W_n\, \varphi_n\, dq = W_n\,\delta_{mn},\end{aligned} \qquad (51,26)$$

d. h. die Eigenwerte W_n der Energiematrix $\mathfrak{H}(\mathfrak{p},\mathfrak{q})$ sind tatsächlich identisch mit den Eigenwerten der SCHRÖDINGER-Gleichung. Zugleich übersieht man die Verwendung der SCHRÖDINGERschen Eigenfunktionen zur Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten: aus (51,14) gewinnt man aus den φ_n die die Übergangswahrscheinlichkeiten festlegenden Matrixelemente.

Eine vollständigere und übersichtlichere Erfassung der Zusammenhänge von SCHRÖDINGERschen Eigenfunktionen und quantenmechanischen Matrizen ergibt sich aus folgenden Betrachtungen, die mit dem Begriff „linearer Operator" verbunden sind. Ein Beispiel haben wir schon kennengelernt, indem der Matrix $\mathfrak{p}$ der SCHRÖDINGER-Operator $\frac{h}{2\pi i}\frac{d}{dq}$ zugeordnet wurde. Man bezeichnet ganz allgemein als linearen Operator eine Rechenvorschrift, die aus jeder Funktion $f(q)$ eine neue Funktion — sie werde R genannt — hervorgehen läßt. Für die Summe zweier Funktionen gilt dann

$$R\{f(q) + g(q)\} = R\,f(q) + R\,g(q). \qquad (51,27)$$

Wird auf die Funktion $R\,f(q)$ nochmals ein neuer Operator T angewandt, so entsteht eine Funktion $TR\,f(q)$.

Man pflegt den dritten Operator, dessen Anwendung darin besteht, daß erst R und dann T angewandt wird, als das „Produkt" TR zu bezeichnen. Entsprechend ergibt sich für die Addition

$$(T + R)\,f(q) = T\,f(q) + R\,f(q). \qquad (51,28)$$

Mit Operatoren kann man also in ganz ähnlicher Weise rechnen wie mit Matrizen. Auch das kommutative Gesetz $RT = TR$ gilt im allgemeinen nicht.

Als Beispiel wurde der Operator $\frac{d}{dq}$ betrachtet. Dann ist für jede Funktion $f(q)$

$$\left(\frac{d}{dq} q - q \frac{d}{dq}\right) f(q) = \frac{d}{dq}(q f(q)) - q \frac{df(q)}{dq} = f(q), \tag{51,29}$$

was durch die Operatorgleichung

$$\frac{d}{dq} q - q \frac{d}{dq} = 1 \tag{51,30}$$

ausgedrückt werden kann, wobei 1 der Einheitsoperator ist.

Wird nun der Operator „Multiplikation mit q" durch Q bezeichnet und gesetzt $P = \frac{h}{2\pi i} \frac{d}{dq}$, so erhält man aus (51,30)

$$PQ - QP = \frac{h}{2\pi i} 1, \tag{51,31}$$

d. h. die Operatoren P und Q erfüllen die kanonische Vertauschungsregel; es besteht also eine vollständige „Isomorphie" zwischen den Operatoren P, Q und den Matrizen $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$.

Daher kann gefolgert werden:

Eine beliebige Matrix $$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}) \tag{51,32}$$

kann folgendermaßen konstruiert werden

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})_{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* F(P, Q) \varphi_n \, dq \tag{51,33}$$

oder anders ausgedrückt: Der Operator $F(P, Q)$ soll aus den P, Q in genau derselben Weise durch nichtkommutative Multiplikation und durch Addition aufgebaut werden, wie $\mathfrak{F}(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})$ aus $\mathfrak{p}, \mathfrak{q}$ aufgebaut wird. Dieser Operator $F(P, Q)$ soll dann im Integral auf die Funktion $\varphi_n(q)$ angewandt werden.

Diese Überlegungen lassen sich sofort auf Systeme von beliebig vielen Freiheitsgraden übertragen. Den die kanonischen Vertauschungsregeln

$$[\mathfrak{p}_k, \mathfrak{p}_l] = [\mathfrak{q}_k, \mathfrak{q}_l] = 0, \quad [\mathfrak{p}_k, \mathfrak{q}_l] = \frac{h}{2\pi i} \mathfrak{E} \delta_{kl} \tag{51,34}$$

erfüllenden Matrizen $\mathfrak{p}_k, \mathfrak{q}_k$ entsprechen die auf Funktionen $f(q_1, q_2, \ldots)$ der Zahlenvariablen $q_1, q_2, \ldots$ anzuwendenden Operatoren

$$P_k = \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_k}, \quad Q_k = \text{Multiplikation mit } q_k, \tag{51,35}$$

die ebenfalls den kanonischen Vertauschungsregeln genügen:

$$[P_k, P_l] = [Q_k, Q_l] = 0, \quad [P_k, Q_l] = \frac{h}{2\pi i} \delta_{kl} 1. \tag{51,36}$$

Es berechnet sich also eine Matrix $\mathfrak{F}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots; \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots)$ aus den Eigenfunktionen gemäß

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots; \mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* F(P_1, P_2, \ldots; Q_1, Q_2, \ldots) \varphi_n \cdot dq_1 \, dq_2 \ldots \quad (51$$

Die dem Problem zugeordnete SCHRÖDINGER-Gleichung aber lautet

$$\{H(P_1, P_2, \ldots; Q_1, Q_2, \ldots) - W_n\}\varphi_n = 0. \tag{51,38}$$

Damit ist eine weitreichende Verallgemeinerung der SCHRÖDINGER-Gleichung gewonnen. Denn jetzt kann z.B. der Einfluß eines magnetischen Feldes auf einen elektrisch geladenen Massenpunkt (Ladung $= -e$) untersucht werden. Klassisch wird (vgl. Ziffer 49) das Magnetfeld $\mathfrak{H}$ durch das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ dargestellt.

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{A} \tag{51,39}$$

und dann die HAMILTON-Funktion angesetzt

$$H = \frac{1}{2\mu}\left(p - \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right)^2 + U. \tag{51,40}$$

Die quantenmechanische Formulierung würde also lauten

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{2\mu}\left(\mathfrak{p} - \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right)^2 + \mathfrak{U}; \tag{51,41}$$

dabei ist sowohl $\mathfrak{A}$ als auch $\mathfrak{U}$ eine Matrix

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}(\mathfrak{r}), \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{r}), \quad \mathfrak{r} = (\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}). \tag{51,42}$$

Damit lautet die zugehörige SCHRÖDINGER-Gleichung:

$$\left\{\frac{1}{2\mu}\left(\frac{h}{2\pi i}\operatorname{grad} - \frac{e}{c}\mathfrak{A}\right)^2 + \mathfrak{U} - W_n\right\}\varphi_n = 0. \tag{51,43}$$

Notwendigerweise müssen jetzt die Eigenfunktionen komplex ausfallen. Solange nur mit einer potentiellen Energie gerechnet wurde, stellt die SCHRÖDINGER Gleichung eine reelle Differentialgleichung dar. Da also grundsätzlich die SCHRÖDINGERschen Eigenfunktionen als komplex anzusehen sind, bedeutet die SCHRÖDINGER-Amplitude nichts anderes als eine Hilfsgröße der Rechnung, und erst für die daraus abgeleiteten Größen, wie $(\varphi)^2$ oder die Matrixelemente, gibt es eine unmittelbare physikalische Interpretation.

52. Deutung und Bedeutung der Matrizen

Vgl. Mache

Jede physikalische Größe läßt sich, wie wir gesehen haben, einer Matrix zuordnen. Die Werte, die die Energie eines abgeschlossenen Systems annehmen kann, sind die Eigenwerte der Matrix. Betrachtet man die Matrix (43,6), so erkennt man: Die Diagonalelemente der Matrix sind den stationären Zuständen zugeordnet, und zwar stellen sie gerade die Zeitmittel dar; die Matrixelemente außerhalb der Diagonalen sind aber den Quantensprüngen zugeordnet; die Quadrate ihrer Beträge sind die Übergangswahrscheinlichkeiten. Da die Eigenwerte hermitischer Matrizen reell sind, werden hermitische Matrizen zur Darstellung „meßbarer" Größen benutzt. Ist die einer Matrix entsprechende physikalische Größe gemessen, so ist damit auch jede physikalische Größe gemessen, deren Matrix eine Funktion der ursprünglichen Matrix ist. Weiterhin wird gefordert, daß, wie im Beispiel der Energie, die möglichen Werte einer physikalischen Größe die Eigenwerte der zugehörigen Matrix sind.

Es sei nun $\mathfrak{A}$ eine hermitische Matrix mit diskretem Eigenwertspektrum. $\mathfrak{A}$ möge nun durch eine unitäre Matrix $\mathfrak{U}$ auf Hauptachsen transformiert werden:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{U}\mathfrak{B}\mathfrak{U}^{-1}, \quad \mathfrak{B} = (\mathfrak{b}_k \delta_{kl}). \tag{52,1}$$

Der Zeitmittelwert von $\mathfrak{A}$ im n-ten stationären Zustand wird also

$$a_{nn} = \sum_k U_{nk} b_k U_{kn}^{-1} = \sum_k b_k \mid U_{nk} \mid^2, \tag{52,2}$$

wo

$$\sum_k \mid U_{nk} \mid^2 = 1 \tag{52,3}$$

ist. Die Zahl $\mid U_{nk} \mid^2$ gibt nun die Wahrscheinlichkeit an, daß bei der Beobachtung des im n-ten Quantenzustand befindlichen Systems die Größe $\mathfrak{A}$ gerade den Wert b_k annimmt; denn mit dieser Annahme liefert (52,2) den Zeitmittelwert a_{nn} als statistischen Mittelwert der Eigenwerte b_k mit den Gewichten $\mid U_{nk} \mid^2$ oder als „Erwartungswert"; zugleich bedeutet (52,3), daß die Summe der Wahrscheinlichkeiten den Wert 1 hat.

Die Betrachtung der Wahrscheinlichkeit führt zum Problem der Meßbarkeit physikalischer Größen. Es ist im allgemeinen nicht möglich, eine Größe $\mathfrak{A}$ und zugleich eine Größe $\mathfrak{B}$ zu messen. Haben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zugleich Diagonalform (in einem Koordinatensystem des Hilbert-Raumes), so ist $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = 0$ und die Transformation, die von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$ führt, ist die Identität $U = 1$, also $\mid U_{nm} \mid^2 = \delta_{nm}$. Es ist also die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung des Wertes a_n von $\mathfrak{A}$ den Wert b_n von $\mathfrak{B}$ zu finden, 1, irgend einen anderen Wert zu finden Null ($m \neq n$), d. h. aber, man kann nur solche Größen gleichzeitig messen, die miteinander vertauschbar sind.

Da die Ortskoordinaten nicht mit ihren zugehörigen Impulskoordinaten vertauschbar sind (Vertauschungsrelation), so folgt, daß man Ort und Impuls eines Massenpunktes nicht zugleich messend exakt bestimmen kann. Diesen Sachverhalt drückt aber gerade die Heisenbergsche Ungenauigkeitsrelation aus. Ungenauigkeitsrelation und Vertauschungsrelation sind also aufs engste miteinander verknüpft.

Offenbar hängt diese quantenmechanische Tatsache, daß nicht irgend zwei Messungen miteinander verträglich sind, eng damit zusammen, daß jede Messung einen Eingriff in das betrachtete System bedeutet, der selbst den zuvor bestehenden Zustand stört.

Neben der Darstellung meßbarer Größen durch Matrizen (Heisenberg) bevorzugt die Transformationstheorie (Jordan) eine Darstellung durch Hilbert-Vektoren (bzw. Tensoren) im Hilbert-Raum. Den gegebenen Zustand eines Systems wird ein Vektor in einem unendlich dimensionalen Raum zugeordnet; die Wahrscheinlichkeitsamplituden werden als Komponenten dieses Vektors nach den Achsen eines bestimmten Koordinatensystems gedeutet. Die Aufgabe der Quantenmechanik lautet dann: Für jede physikalische Größe, die an einem gegebenen System auftritt, ist das zugehörige Koordinatensystem Σ ausfindig zu machen und dessen Lage zu einem beliebig gewählten Grundsystem Σ_0 festzustellen. Dann genügt es, die Komponenten des Zustandsvektors in Bezug auf eines der Systeme zu wissen, um daraus die Wahrscheinlichkeitsamplituden einer jeden Größe durch eine einfache Koordinatentransformation berechnen zu können. Eine vollständige Lösung des Problems ist erreicht, wenn die Eigenwerte der Abbildung und der Richtung der Hauptachsen bestimmt sind.

Anmerkung 1 (zu § 48).

Eigenfunktionen des Leuchtelektrons eines Alkaliatoms in sphärischen Polarkoordinaten.

$$1S:\quad X(1S)\frac{1}{2\sqrt{\pi}},$$

$$2S:\quad X(2S)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

$$2P:\begin{cases} X(2P)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\vartheta, \\ X(2P)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\sin\vartheta\sin\varphi, \\ X(2P)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\sin\vartheta\cos\varphi. \end{cases}$$

$$3S:\quad X(3S)\frac{1}{2\sqrt{\pi}}.$$

$$3P:\begin{cases} X(3P)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\vartheta, \\ X(3P)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\sin\vartheta\sin\varphi, \\ X(3P)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\sin\vartheta\cos\varphi. \end{cases}$$

$$3D:\begin{cases} X(3D)\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{\pi}}(3\cos^2\vartheta-1), \\ X(3D)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{\pi}}\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi, \\ X(3D)\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{\pi}}\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi, \\ X(3D)\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{\pi}}\sin^2\vartheta\sin 2\varphi, \\ X(3D)\frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{\pi}}\sin^2\vartheta\cos 2\varphi. \end{cases}$$

LITERATURVERZEICHNIS

I. Matrizenalgebra

M. Bôcher, Einführung in die Algebra. Teubner, Leipzig 1910.
R. Courant, D. Hilbert, Methoden der math. Physik I. 2. Aufl., Springer, Berlin 1931.
C. C. MacDuffee, The Theory of Matrices, Springer, Berlin 1933.
R. A. Frazer, W. J. Duncan, A. R. Colar, Elementary Matrices, Cambridge 1938.
H. Hasse, Höhere Algebra I, II, de Gruyter, Sammlung Göschen.
H. W. E. Jung, Matrizen und Determinanten, Fachschulverlag Leipzig 1951.
G. Kowalewski, Determinanten, de Gruyter, Berlin 1925.
E. Lohr, Vektor und Dyadenrechnung, de Gruyter, Berlin 1939.
E. Madelung, Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers, 3. Aufl. Springer, Berlin 1936.
F. Neiß, Determinanten und Matrizen, Springer, Berlin 1941.
W. Schmeidler, Vorträge über Determinanten und Matrizen mit Anwendungen in Physik und Technik, Akad. Verlag, Berlin 1949.
O. Schreier, E. Sperner, Vorlesungen über Matrizen, Teubner, Leipzig 1932.
B. L. van der Waerden, Moderne Algebra I., 2. Aufl., II., 1. Aufl. Springer, Berlin 1937 und 1931.
R. Zurmühl, Matrizen, Springer, Berlin 1950.

II. Unendliche Matrizen

E. Hellinger, O. Toeplitz, Encyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. II, Teil 3, 2, Teubner, Leipzig-Berlin 1923–1927.
E. Hellinger, O. Toeplitz, Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen. Math. Annal. **69** (1910) 289.
D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Teubner, Leipzig 1912.
J. v. Neumann, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitischer Funktionaloperationen. Math. Annal. **102** (1929) 49.
J. v. Neumann, Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen. Journ. f. reine und angewandte Math. **161** (1929) 208.
A. Wintner, Spektraltheorie der unendlichen Matrizen, Hirzel, Leipzig 1929.
A. Wintner, Zur Theorie der beschränkten Bilinearformen. Math. Z. 30 (1929) 228.

III. Anwendungen in der Elektrotechnik

R. Feldtkeller, Einführung in die Vierpoltheorie der elektrischen Nachrichtentechnik, 2. Aufl., Hirzel, Leipzig 1942.
L. Frauenberger, Beitrag zur Theorie von Dreiphasentransformatoren ohne Nulleiterstrom im stationären Betrieb und bei Einschwingvorgängen. Elektrotechnik und Maschinenbau 58 (1940) 293.
E. Hameister, Einführung in das Rechnen mit Matrizen und Systemen als rechnerische Grundlage für die Vierpol- und Siebschaltungstheorie der Nachrichtentechnik. Z. f. Fernmeldetechnik 22 (1941) 74.

L. Kneissler-Maixdorf. Einführung in die Anwendung der Matrizenrechnung auf quasistationäre Wechselstromvorgänge. Elektrotechn. und Maschinenbau 38 (1940) 308.
G. Oberdorfer, Lehrbuch der Elektrotechnik II, Oldenbourg, München 1940.
M. Päsler, Die Anwendung des Matrizenkalküls auf Probleme der H.-F.-Technik. Hochfrequ. u. Elektroak. 59 (1942) 78.
M. Päsler, Betrachtungen über die Kopplungsverhältnisse von n in Serie geschalteten Übertragern, insbesondere für $n = 2$. Arch. f. Elektrotechnik 36 (1942) 256.
W. Quade, Matrizenrechnung und elektrische Netze. Arch. f. Elektrotechnik 34 (1940) 545.
F. Strecker, Die Anwendung der Matrizenrechnung in der Elektrotechnik. Arch. f. Elektrotechnik 34 (1940) 167.
G. A. Usunoff, Die Behandlung von Netzwerkaufgaben mittels Matrizen. Arch. f. Elektrotechnik 36 (1942) 115.
G. A. Usunoff, Erzeugung von Vierpolen gleicher Kettenwiderstände durch Matrizentransformation. Arch. f. Elektrotechnik 36 (1942) 687.
W. Weizel, Hauptachsentransformation von Vierpolmatrizen und ihre Anwendung. Arch. f. Elektrotechnik 33 (1939) 196.

IV. Quantentheorie

M. Born, P. Jordan, Zur Quantenmechanik. Z. f. Phys. 34 (1925) 858.
M. Born, W. Heisenberg, P. Jordan, Zur Quantenmechanik II. Z. f. Phys. 35 (1926) 557.
M. Born, P. Jordan, Elementare Quantenmechanik, Springer, Berlin 1930.
H. Dänzer, Grundlagen der Quantenmechanik, Steinkopff, Dresden und Leipzig 1935.
W. Heisenberg, Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. Z. f. Phys. 33 (1925) 879.
W. Heisenberg, Über quantentheoretische Kinematik und Mechanik. Math. Annal. 95 (1926) 683.
W. Heisenberg, Die Physikalischen Prinzipien der Quantentheorie, Hirzel, Leipzig 1930.
P. Jordan, Über kanonische Transformationen in der Quantenmechanik. Z. f. Phys. 37 (1926) 383.
P. Jordan, Anschauliche Quantentheorie, Springer, Berlin 1936.
A. March, Die Grundlagen der Quantenmechanik, Barth, Leipzig 1931.
J. v. Neumann, Mathematische Begründung der Quantenmechanik. Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen, Math. phys. Klasse (1927).
J. v. Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer, Berlin 1932.
W. Pauli, Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik. Z. f. Phys. 36 (1926) 336.
Cl. Schaefer, Einf. in die theor. Physik, Bd. III, 2. Teil, de Gruyter, Berlin u. Leipzig 1937.
B. L. van der Waerden, Die Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik der Atomspektren, Vieweg, Braunschweig 1931.
W. Weizel, Lehrbuch der theoretischen Physik, Bd. II, Springer, Berlin 1950.

V. Anwendungen in der Medizin

Y. Reenpää, Das psychophysische Problem im sinnesphysiologischen Versuch. Sitz Ber. u. Abh. d. Naturf. Ges. Rostock (3), Bd. 8, 1940/41.

SACHREGISTER

Die Stichwörter sind so aufgeführt, daß die angegebene Seitenzahl sich auf das erstmalig im Text auftretende Stichwort bezieht.